

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

635

# PHYSIQUE THÉORIQUE

Exposés publiés sous la direction de

**L. DE BROGLIE**

Membre de l'Institut  
Professeur à la Sorbonne  
Prix Nobel

XXIII

## L'ESPACE HERMITIEN QUANTIQUE

PAR

**Julien PACOTTE**

Chercheur scientifique F. N. R. S.  
(Fonds National de la Recherche Scientifique, Bruxelles)



PARIS

**HERMANN & C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS**

6, Rue de la Sorbonne, 6

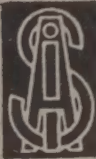
1938





# ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

Séries publiées sous la direction de MM.



ANTHONY (R.), Paris. — Anatomie comparée.

AUDUBERT (René), Paris. — Electrochimie théorique.

BALACHOWSKY (Alfred), Grignon. — Entomologie appliquée.

BECQUEREL (J.-P.), Paris. — Optique et magnétisme aux très basses températures.

BERNSTEIN (S.), U. R. S. S. — Le Calcul des probabilités et l'approximation des fonctions.

BERTRAND (G.), Paris. — Chimie biologique.

BIBLIOTHÈQUE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

BOUTRY (G.-A.), Paris. — Mesures.

BLARINGHEM (L.), Paris. — Biologie végétale.

BLASCHKE (W.), Hambourg. — Géométrie.

BLOCH (Eugène), Paris. — Physique atomique et spectroscopie.

BOHN (Georges), Paris. — Zoologie expérimentale.

BORDET (J.), Bruxelles. — Microbiologie.

BOSLER (J.), Marseille. — Astrophysique.

BRILLOUIN (Léon), Paris. — Théorie des quanta.

— Acoustique théorique et Pratique.

BRILLOUIN (J.), Paris. — Acoustique du Bâtiment.

BROGLIE (Louis DE), Paris. — I. Physique théorique ; II. Philosophie des Sciences.

BROGLIE (Maurice DE), Paris. — I. Physique atomique expérimentale ; II. Applications des Rayons X.

BRUNSCHVIG (Léon), Paris. — Le Progrès de l'esprit.

CABRERA (D.), Madrid. — Exposés sur la théorie de la matière.

CAMICHEL (Ch.), Toulouse. — Hydraulique (générale et appliquée).

CARNAP (Rudolph), Chicago.

CARTAN (E.), Paris. — Géométrie.

CAULLERY (M.), Paris. — Biologie générale.

CAYEUX (L.), Paris. — Géologie.

CHEVALIER (Jacques), Grenoble. — La Morale.

COLLÈGE DE FRANCE. — Conférences publiées sous les auspices et aux frais de la Fondation Singer Polignac.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES (Paris, 1935).

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE organisé par l'Union Internationale de Physique et la Physical Society of London (1934).

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS. — Conférences d'Actualités scientifiques et industrielles.

COTTON (A.), Paris. — Magnéto-optique.

CURIE (M<sup>me</sup> Pierre), Paris. — Radioactivité et physique nucléaire.

DAMIANOVICH (M. Horacio), Argentine. — La Chimie de l'Hélium et des éléments analogues.

DANTCHAKOFF (Véra), Lithuanie. — La cellule germinale dans l'ontogenèse et l'évolution.

DARMOIS (E.), Paris. — Chimie-physique.

DARMOIS (Georges), Paris. — Statistique mathématique.

DARROW (K. K.), New York. — L'Effet thermionique et la Photoélectricité.

DEBYE (P.), Berlin. — Structure de la Matière.

DENJOY (Arnaud), Paris. — Ensembles et Fonctions.

DONNAN (F. G.), F. R. S., Londres. — The Colloidal state (L'Etat colloïdal).

DUCLAUX (J.), Paris. — Leçons de Chimie Physique appliquée à la Biologie.

DUESBERG (J.), Liège. — Biologie générale en rapport avec la cytologie.

ENRIQUES (F.), Rome. — Philosophie et histoire de la pensée scientifique.

ENRIQUES (F.) et SANTILLANA (G. de), Rome. — Histoire de la Pensée Scientifique.

EPHRUSSI (Boris), Paris. — Génétique.

FABRE (R.), Paris. — I. Toxicologie et Hygiène Industrielle ; II. Leçons de Toxicologie.

FABRY (Ch.), Paris. — Optique et Radiations.

FAURÉ-FREMIET (E.), Paris. — Biologie (Embryologie et Histogenèse).

FESSENKOFF (B.), U. R. S. S. — Astrophysique (Photométrie).

FLEURY (P.), Paris. — Leçons de Métrologie (générale et appliquée).

FOUCHÉ (P.), Paris. — Phonétique générale et expérimentale.

FOURNEAU (E.), Paris. — Chimie thérapeutique.

FRAIPONT (Ch.), Liège. — Paléontologie et les grands problèmes de la biologie générale.

FRECHET (Maurice), Paris. — Analyse générale.

FROUMKINE (Alexandre), U. R. S. S. — Phénomènes superficiels.

GAY (M. L.), Montpellier. — Thermodynamique et chimie.

B. S. Moharaj

---





ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

635

# PHYSIQUE THÉORIQUE

Exposés publiés sous la direction de

**L. DE BROGLIE**

Membre de l'Institut  
Professeur à la Sorbonne  
Prix Nobel

XXIII

## L'ESPACE HERMITIEN QUANTIQUE

PAR

**Julien PACOTTE**

Chercheur scientifique F. N. R. S.  
(Fonds National de la Recherche Scientifique, Bruxelles)



PARIS

**HERMANN & C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS**

6, Rue de la Sorbonne, 6

—  
1938

## DU MÊME AUTEUR

---

- La Physique théorique nouvelle*, avec une préface de M. E. BOREL, Membre de l'Académie des Sciences de Paris, 1921 (Gauthier-Villars).  
*La Pensée mathématique contemporaine*, 1925 (Alcan, Bibliothèque de Philosophie contemporaine).  
*Les Méthodes nouvelles en Analyse quantique*, 1929 (Blanchard).  
*La Pensée technique*, 1931 (Alcan, B. P. C.).  
*La Connaissance*, 1934 (Alcan, B. P. C.).  
*La Logique et l'Empirisme intégral*, 1935 (Hermann, Actualités scientifiques et industrielles).  
*Le Physicalisme dans le cadre de l'empirisme intégral*, 1936 (Hermann, A. S. I.).  
*Le Réseau arborescent, schème primordial de la pensée*, 1936 (Hermann, A. S. I.).
- 

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation  
réservés pour tous pays.

COPYRIGHT 1938 BY LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE HERMANN ET C<sup>ie</sup>,  
PARIS.



## INTRODUCTION

---

**D**ANS un domaine primordial des sciences de la nature — domaine comprenant la thermodynamique du rayonnement, des gaz et des conducteurs, l'analyse et la diffusion des radiations, la dynamique des rayons cathodiques, voire même la dynamique générale des particules matérielles et des corps, — le développement simultané des recherches théoriques et expérimentales a finalement révélé un schème physicomathématique d'une portée exceptionnelle : le système des axiomes de la mécanique quantique générale. Ce schème est, sur des points essentiels, très différent des schèmes jusqu'à ce jour admis en physique. L'épistémologie a insisté principalement sur le caractère statistique de la légalité nouvelle qu'il introduit. Mais la mise en œuvre d'un espace hermitien à un nombre infini de dimensions n'est pas un trait moins remarquable du schème nouveau : nous y consacrons le présent mémoire.

Des liens étroits relient l'idée d'espace infinidimensionnel quantique et la méthode symbolique de Dirac. A cet égard, notre travail se présente comme une étude épistémologique sur l'exposé symbolique de la mécanique des quanta : il rattache la méthode de Dirac aux conceptions générales de la Logique des sciences. La valeur pratique de cette méthode n'est pas douteuse : que l'on songe à tout ce qui fut conquis, pour la mécanique quantique, par DIRAC lui-même, qui ne cesse pas de l'utiliser. Quant à l'opportunité d'une étude tendant à en faire saisir le fondement logique, qu'on en juge par les lignes suivantes, qui sont de l'illustre théoricien : « *La méthode symbolique, écrit-il, semble pénétrer plus profondément dans la nature des choses. Elle nous permet d'exprimer les lois physiques d'une façon élé-*

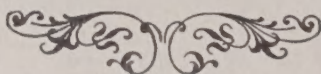


*gante et concise et, très probablement, son emploi se généralisera de plus en plus, à mesure qu'on la comprendra mieux... »*

Les trois chapitres du présent mémoire correspondent assez bien aux trois idées de mathématique pure, de physique théorique et de physique générale, ou encore aux idées de formel sans plus, de formel propre à la physique et de rapport entre le formel et le réel. Plus précisément, jusque dans les subdivisions, nous avons envisagé successivement l'espace infinidimensionnel quantique, de points de vue ordonnés selon la *Logique des sciences*.

Au sujet des deux classes de vecteurs de l'espace hermitien (vecteurs  $\psi$  et vecteurs  $\varphi$  de Dirac), il nous a semblé utile de compléter l'idée de leur correspondance par celle d'un opérateur  $\varepsilon$ , pseudo-linéaire, qui appliqué à un  $\psi$  donne un  $\varphi$  et inversement : outre que cette manière de faire est bien conforme à l'esprit général du calcul abstrait, elle fournit des notations commodes et une formulation remarquable des règles de calcul. De même, dans le passage du calcul abstrait au calcul constructif, nous introduisons des unités  $\eta$  et  $\varepsilon$ , assez analogues aux deux unités, réelle et purement imaginaire, du calcul des quantités complexes ordinaires : nous trouvons ainsi que la géométrie hermitienne table sur une règle de formation du produit scalaire de deux vecteurs, qui rappelle la règle du produit de deux complexes imaginaires ; la différence entre les deux règles tient dans une remarquable permutation des signes.

Mais notre sujet appartient aux sciences naturelles, non à la mathématique pure. Le second chapitre, qui est physico-mathématique, présente, lui aussi, quelques aperçus nouveaux. Ils nous ont, du reste, invité à des désignations nouvelles : axe des probabilités, dérivation hermitienne, dérivation quantique, etc... De même, au troisième et dernier chapitre, les considérations qui ont trait à l'espace infinidimensionnel quantique comme ultraphénomène vérifiable sont originales. Elles concernent le rôle de l'analyse fonctionnelle et de l'espace d'Hilbert en physique : elles opposent leur usage purement analytique dans les théories classiques et leur signification vraiment physique en mécanique quantique.





## CHAPITRE PREMIER

### L'espace infinidimensionnel hermitien.

---

#### 1. — L'ESPACE INFINIDIMENSIONNEL ABSTRAIT NON COMPLEXE.

La théorie quantique de l'atome chimique met en œuvre un espace infinidimensionnel hermitien. Les équations sont généralement présentées sous forme analytique : l'idée d'un espace à un nombre infini de dimensions, espace affine et possédant une métricité déterminée, se manifeste alors par l'invariance des équations pour tel groupe de transformations ; les coordonnées sont imaginaires et la métricité prend la forme hermitienne. Nous commencerons par examiner l'espace infinidimensionnel non complexe. Nous nous placerons au point de vue abstrait, symbolique (non constructif, non analytique) : comme en géométrie pure ordinaire, nous allons donc à la spatialité directement, sans utiliser les coordonnées. Cette étude sera suivie d'un examen du passage à l'espace complexe, plus spécialement à l'espace hermitien ; nous envisagerons là les deux voies qui s'offrent naturellement : le passage abstrait et le passage constructif, deux méthodes déjà utilisées dans la théorie générale des imaginaires. La géométrie complexe ainsi obtenue est abstraite et symbolique, même si le passage à l'imaginaire est constructif : nous devons finalement la transposer en une géométrie analytique, pour retrouver les formules classiques d'analyse fonctionnelle et d'analyse quantique. D'où les trois divisions du chapitre présent.

L'espace non complexe que nous devons examiner ici comme point de départ pour l'extension imaginaire utilisée en analyse quantique est la simple généralisation infinidimensionnelle de l'espace euclidien. Première conséquence : nous n'avons pas à envisager les champs essentiels de métricité qui caractérisent les espaces à courbure et à torsion ; notons d'ailleurs que nous ne devons étendre aucun champ dans l'espace infinidimensionnel. Seconde

conséquence : l'idée de déplacement parallèle n'est pas, dans la question présente, subordonnée à un certain type de métricité. La situation est en quelque sorte inverse : l'idée de métricité, d'égalité métrique, de congruence, vient s'insérer dans un espace affine préalable, non dans un espace amorphe. D'une manière générale, la géométrie affine homogène est obtenue à partir de la géométrie projective, en y introduisant l'idée de parallélisme. Toutefois, la théorie affine des vecteurs issus d'un même point (la seule qui nous intéresse) peut être présentée directement, sans appel, ni à l'espace projectif, ni à l'idée de déplacement parallèle : il suffit de considérer le vecteur et la somme géométrique comme des objets premiers ayant certaines propriétés, des objets abstraitement définis par ces propriétés mêmes. Tel sera notre point de vue.

Le système des axiomes de la géométrie affine ainsi réduite tient dans les règles fondamentales concernant l'addition des vecteurs entre eux et la multiplication d'un vecteur par un nombre du continu réel. Ces règles sont analogues à celles des nombres. L'addition est associative et commutative. Pour la multiplication, l'associativité et la commutativité ne concernent que les facteurs numériques, puisqu'il n'y a jamais qu'un seul facteur vectoriel. Quant à la distributivité, qui est l'essence de la linéarité en général, elle vise, soit les termes d'un facteur numérique, soit les termes d'une somme vectorielle :

$$(a + b)X = aX + bX, \quad a(X + Y) = aX + aY.$$

En ajoutant des vecteurs respectivement multipliés par des coefficients numériques, on obtient une expression qui peut être appelée une fonction linéaire simple des vecteurs. Etant donné plusieurs vecteurs, s'il est possible de choisir les coefficients (non tous nuls) de manière que l'expression soit nulle, on dit que les vecteurs sont linéairement dépendants. *C'est précisément cette idée de dépendance ou d'indépendance linéaire qui fonde, au point de vue ici adopté, l'idée de nombre des dimensions d'un espace. Un espace affine possède  $N$  dimensions si tout vecteur de cet espace peut être exprimé par une fonction linéaire simple de  $N$  vecteurs linéairement indépendants donnés.* L'unicité d'une telle décomposition résulte immédiatement du caractère du système des  $N$  vecteurs. Effectivement, si un vecteur admettait deux décompositions suivant ce système, on pourrait former, pour un vecteur nul, un développement



selon la même base et présentant des coefficients non tous nuls à la fois : les vecteurs donnés ne seraient donc pas linéairement indépendants.

Si  $N$  est infini, il faut envisager, pour la définition de la dépendance linéaire et pour la décomposition suivant une base donnée, des fonctions linéaires de forme spéciale. Il se présente d'abord des sommations vectorielles infinies : il se présente aussi des intégrales vectorielles et des expressions mixtes formées d'une sommation infinie et d'une intégrale. Les fonctions linéaires simples peuvent prendre la forme d'une intégrale vectorielle à raison du caractère en principe arbitraire de l'ordre des termes vectoriels sommés. Effectivement, faisons correspondre à une suite de points du continu réel, la suite des indices des vecteurs : la correspondance peut être établie de manière que les points forment un ensemble assez dense dans certains intervalles. S'il s'agissait, non pas de vecteurs mais de grandeurs scalaires, on pourrait définir clairement les conditions du passage à une densité continue, dans des intervalles de cette sorte. De même, si les vecteurs étaient définis analytiquement. Nous introduisons ici la densité continue vectorielle par simple analogie.

Cette manière de procéder est conforme à la méthode générale de la logique abstraite et de l'algèbre symbolique. En géométrie abstraite, nous devons admettre les sommations intégrales vectorielles, et déjà les sommations vectorielles infinies, sans plus de difficulté que le plan à l'infini en géométrie projective affine ordinaire : les théorèmes d'existence, la non-contradiction des axiomes abstraits, la justification des schèmes symboliques, appartiennent à l'analyse, à la géométrie analytique. Il s'agit, au fond, d'une généralisation de la théorie des équations linéaires de l'algèbre ordinaire, théorie qui est l'arrière-plan constructif de la géométrie affine abstraite à un nombre fini de dimensions. Cette généralisation est une des tâches les plus importantes de l'analyse fonctionnelle : elle apporte précisément la justification de l'espace affine infinidimensionnel, au point de vue de la non-contradiction de ses axiomes.

Une pièce remarquable de la géométrie abstraite infinidimensionnelle et qui manifeste au plus haut point les possibilités de la méthode symbolique dans le domaine infinitésimal est la fonction  $\delta(x)$  de DIRAC. Elle est indispensable si l'on veut développer méthodiquement, parallèlement à la géométrie à un nombre fini de dimensions, une géométrie infinidimensionnelle. On la rencontre



dans toutes les questions, à raison de la forme intégrale que peuvent prendre les fonctions linéaires vectorielles simples. Elle est la généralisation du symbole  $\delta_{mn}$  lorsque les indices entiers  $m$  et  $n$  deviennent des variables continues, et se présente originellement comme une fonction  $\delta(b - a)$  de la différence de deux variables. Le symbole  $\delta_{mn}$  est égal à 1 ou à 0 selon que  $m$  et  $n$  sont ou non égaux. Pour la fonction  $\delta(x)$ , il faut prendre, par analogie,  $\delta(x) = 0$  pour  $x \neq 0$  (donc pour  $a \neq b$ ), et  $\int \delta(x) dx = 1$ , l'intégrale s'étendant à tout le domaine du continu réel. Du point de vue analytique, cette définition est contradictoire : elle ne peut être admise qu'avec certaines retouches sur la valeur de  $\delta$  au voisinage du point zéro. La géométrie symbolique ne fait pas ces réserves : c'est qu'elle ne voit pas dans l'intégrale de  $\delta$  la limite d'une sommation mais un symbole auquel on convient d'appliquer certaines règles du calcul intégral, celles qui s'énoncent sans un retour à la notion de limite et peuvent être envisagées abstraitement, symboliquement. La justification du calcul des fonctions  $\delta$  n'incombe pas à la géométrie abstraite infinidimensionnelle mais au calcul fonctionnel, qui est, nous l'avons expliqué, l'arrière-plan logiquement indispensable de celle-ci.

Quant à l'usage de la fonction  $\delta$ , nous en pouvons déjà signaler un exemple, qui concerne une idée fondamentale de la géométrie affine : celle même qui définit le nombre de dimensions de l'espace. Tout vecteur peut être décomposé suivant une base donnée (système complet de vecteurs linéairement indépendants) : un vecteur de la base même peut donc l'être comme tout autre. Si les axes forment une suite discrète d'indice  $m$ , le vecteur d'indice  $n$  sera représenté par une série vectorielle dont les coefficients sont  $\delta_{mn}$ . D'une manière analogue, si la suite des axes est continue et admet un indice continu  $a$ , le vecteur d'indice  $b$  est représenté par une intégrale vectorielle : le coefficient devant le vecteur, sous l'intégrale, est précisément  $\delta(b - a)$ .

Introduisons maintenant une métricité euclidienne dans l'espace affine. En géométrie analytique, la métrique euclidienne est représentée par une forme quadratique « définie » (présentant, sous sa forme réduite, des coefficients tous positifs) : cette forme, invariante pour le groupe des congruences, sert à définir la longueur d'un vecteur. Au lieu de la forme quadratique, on peut également considérer la forme bilinéaire symétrique correspondante : celle-ci définit précisément le produit scalaire de deux vecteurs. L'idée de produit

scalaire est donc intimement liée à celle de distance. On peut la prendre comme fondement de la métricité, dans un exposé abstrait de la géométrie. On suppose attaché à toute paire de vecteurs un nombre du continu réel, appelé produit scalaire : les règles conventionnelles fondamentales du calcul des produits scalaires sont précisément le fondement métrique de l'espace affine considéré.

Les relations conventionnelles sont aussi simples que celles qui régissent la somme des vecteurs et le produit d'un vecteur par un nombre, et qui établissent, nous l'avons expliqué, le caractère affine lui-même. Les voici. D'abord, pour ce qui est des coefficients numériques, la multiplication d'un facteur vectoriel par un nombre multiplie le produit scalaire par ce nombre. En second lieu, la multiplication scalaire de deux vecteurs est commutative et distributive : on a donc la relation :

$$A(X + Y) = AX + AY,$$

analogue aux axiomes distributifs de la géométrie affine. Si les deux vecteurs à multiplier sont décomposés suivant un même système de vecteurs linéairement indépendants, le produit prend la forme d'une fonction homogène bilinéaire des coefficients des développements ; les coefficients de cette fonction sont les produits scalaires des vecteurs (pris deux à deux) du système de base : à raison de la commutativité du produit, la fonction est symétrique. Cette forme bilinéaire est précisément celle qui sert de fondement à la métricité en géométrie analytique.

Le nombre des dimensions de l'espace affine n'intervient pas, comme on voit, dans l'exposé abstrait, symbolique, de la métricité. Le passage à  $N$  infini n'apporte donc aucun changement du côté de la métricité, sur le plan de la géométrie abstraite. Mais la géométrie abstraite suppose un arrière-plan constructif, arithmétique, analytique. Nous l'avons signalé pour la géométrie affine : au passage à  $N$  infini correspond le passage des simples équations linéaires de l'algèbre aux équations infinitésimales de l'analyse fonctionnelle. Pour la métricité, la situation est analogue. Qu'il soit possible de faire correspondre à toutes les paires de vecteurs un nombre unique, sans contredire les règles axiomatiques du produit, c'est une question essentielle où se confrontent les principes de la géométrie affine et ceux de la métricité. La preuve de la non-contradiction n'est pas faite sur le plan de la géométrie abstraite : elle se rattache

à la géométrie analytique, à la représentation de tous les vecteurs pour une même base. Avec cette représentation s'introduit le nombre  $N$ . Le passage à l'espace infinidimensionnel, sur le point de la non-contradiction de la métricité, ramène les questions d'analyse déjà soulevées par la géométrie affine infinidimensionnelle, notamment la décomposition d'un vecteur selon les axes en nombre infini d'un repère donné.

Occupons-nous maintenant de l'idée d'orthogonalité. Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul : à notre point de vue, il s'agit là d'une définition. Comme nous avons pris le produit scalaire et ses propriétés pour fondement de la métrique, la notion d'orthogonalité est ainsi rattachée immédiatement à celle de métricité. Notons que l'orthogonalité est nécessairement présentée dans le cadre d'un espace métrique. Le fait que sa définition n'envisage que le zéro d'une fonction semble d'abord indiquer une généralisation : la fonction pourrait ne pas jouir des propriétés qui en font un produit scalaire. Mais il faut alors introduire des axiomes d'orthogonalité qui ramènent précisément les propriétés linéaires de la fonction : il ne peut être question que de la fonction même qui définit le produit scalaire. En d'autres termes, il ne convient pas de procéder pour l'orthogonalité comme pour le parallélisme : le parallélisme est un caractère complémentaire qui fait de l'espace projectif un espace affine ; l'orthogonalité n'est pas un simple caractère complémentaire qui nous ferait avancer vers l'espace métrique : elle concerne nécessairement un espace métrique. (C'est ce que rend déjà manifeste la genèse de la sphère par le sommet d'un angle droit mobile dont les côtés sont astreints à passer par deux points fixes.)

Reprenons, pour y insérer la notion d'orthogonalité, l'idée de système de vecteurs linéairement indépendants, système complet servant de base à la décomposition d'un vecteur donné quelconque. Une base formée de vecteurs  $X_m$  est dite orthogonale et normée (norme 1) si l'on a  $X_m X_n = \delta_{mn}$ . De même, deux bases  $X_m$  et  $Y_n$  sont réciproques si l'on a  $X_m Y_n = \delta_{mn}$ . Si une base est orthogonale et normée, elle coïncide avec la base réciproque. Cela posé, on a la relation vectorielle fondamentale :

$$A = \sum (A Y_m) X_m :$$

les coefficients de la décomposition d'un vecteur quelconque  $A$



suivant une base sont des produits scalaires relatifs à la base réciproque. Si la base  $X_m$  est orthogonale et normée, les produits scalaires concernent cette base même. Ce sont là les principes du rapport entre les coefficients d'une décomposition vectorielle et les projections orthogonales. Notons qu'à notre point de vue, qui est celui de la géométrie abstraite des vecteurs issus d'un même point, l'idée de projection orthogonale doit être définie à partir de l'idée de produit scalaire, ce qui crée entre les deux concepts un rapport de subordination exactement inverse de celui que l'on envisage dans l'exposé synthétique habituel de la géométrie. On dirige suivant l'axe de projection un vecteur  $Z$  : la projection orthogonale d'un vecteur  $A$  est alors, par définition, un vecteur dirigé suivant l'axe et mesuré par  $(AZ) : |Z|$ . Pour le système orthogonal et normé (norme 1), la projection orthogonale a pour mesure  $AX_m$  ; comme vecteur, elle est par conséquent donnée par  $(AX_m) X_m$ .

Supposons maintenant  $N = \infty$ . La définition des bases réciproques et celle des bases orthogonales et normées subsistent. Si les indices  $m$ , et donc aussi les indices  $n$ , restent des variables entières, la forme de la condition en  $\delta$  n'est pas changée. Si ces indices font place à des variables continues  $a$  et  $b$ , il faut remplacer  $\delta_{mn}$  par  $\delta(b - a)$ . On a ainsi une condition telle que :

$$X(a) Y(b) = \delta(b - a),$$

qui se décompose en :

$$\begin{aligned} X(a) Y(b) &= 0, & (b \neq a) \\ \int X(a) Y(b) da &= 1, \end{aligned}$$

deux relations exprimant respectivement l'orthogonalité et la normalisation mutuelles des systèmes  $X$  et  $Y$ . Si la base est orthogonale et normée, on a des relations semblables en  $X(a) X(b)$ . La norme, longueur des vecteurs de la base, cesse donc d'être l'unité. Dans un développement suivant les vecteurs  $X_m$ , devenus des vecteurs  $X(a)$ , infiniment nombreux dans un intervalle fini, les coefficients sont nécessairement infiniment petits : la norme est devenue infinie.

Les considérations qui précèdent concernent la nature même de l'espace euclidien : elles présentent, dans leur enchaînement logique et sous le rapport de leur généralisation infinidimensionnelle, les trois idées d'affinité, de métricité et d'orthogonalité. Il nous faut maintenant examiner un concept très proche de ces idées fondamen-

tales et d'une importance primordiale aussi bien pour le développement méthodologique de la géométrie que pour l'exposé des théories physiques : le concept d'opérateur linéaire appliqué à un vecteur, autrement dit, le concept de tenseur du second ordre. Analytiquement, il s'agit d'un système de transformations linéaires scalaires appliquées à un système de variables (les coordonnées, les nombres représentatifs du vecteur) ; plus précisément, le tenseur est, analytiquement, la matrice de la transformation, matrice qu'il faut modifier corrélativement aux changements de repère. Mais cette méthode des repères, des nombres représentatifs et des invariants ne nous convient pas : nous voulons maintenir ici le point de vue abstrait, symbolique. Nous devons définir l'opérateur linéaire par ses propriétés conventionnelles, le définir implicitement, et non pas constructivement.

Les axiomes qui donnent la définition implicite de l'idée d'opérateur linéaire sont analogues à ceux qui définissent le caractère affine et la métricité. Ils concernent des sommes et des produits, et visent leur associativité et leur commutativité ; surtout, ils visent la distributivité du produit vis-à-vis de la somme, caractère essentiel de toute linéarité. Désignant les vecteurs par des majuscules et les opérateurs par des minuscules grecques, on admet les relations :

$$\alpha (X + Y) = \alpha X + \alpha Y, \quad (\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X,$$

qui justifient l'appellation d'opérateur linéaire. On définit, du reste, le produit de deux opérateurs par la relation :

$$(\alpha \beta) X = \alpha (\beta X),$$

qui fonde l'associativité des opérateurs. Le produit de deux opérateurs n'est généralement pas commutatif ; on a  $\alpha\beta = \beta\alpha$  mais non pas  $\alpha\beta = \beta\alpha$ .

L'existence d'objets formels satisfaisant à ce système d'axiomes ne se pose pas sur le plan de la géométrie abstraite mais sur celui de la géométrie analytique. Elle est en rapport étroit avec le fait que la connaissance du produit d'un opérateur par chacun des vecteurs fondamentaux d'un système complet rend possible, par la décomposition vectorielle et à raison de la linéarité, le calcul du produit de l'opérateur par un vecteur quelconque. L'extension à l'espace infinidimensionnel est immédiate, sur le plan de la géométrie

abstraite ; sur le plan constructif, elle dépend de propositions d'analyse fonctionnelle. La distributivité vis-à-vis des sommes vectorielles s'étend au cas des sommes infinies et des sommes intégrales, notamment celles qui se présentent lors de la décomposition d'un vecteur suivant les axes d'une base.

Les axiomes de l'opérateur linéaire ne font pas figurer le produit scalaire : ils sont donc valables dans l'espace affine, avant l'introduction de la métricité. Le passage à l'espace métrique s'accuse, ici, avec la considération de formes quadratiques vectorielles abstraites du type  $X \propto X$  (comme dans la théorie des quadriques) et de formes bilinéaires du type  $X \propto Y$ . Ces formes bilinéaires sont le fondement des idées d'opérateurs mutuellement conjugués, d'opérateurs symétriques et antisymétriques. Il n'y a naturellement, en géométrie abstraite, aucune référence possible, ni aux matrices transposées, ni aux matrices symétriques droites et gauches, ni au caractère invariantif qui s'y attache : les opérateurs  $\alpha$  et  $\beta$  sont appelés conjugués si l'on a  $X \propto Y = Y \propto X$ , et la symétrie est définie par  $\alpha = \beta$ . Cette manière de procéder conduit, en géométrie complexe, à des généralisations dans des sens divers : elle amène, en particulier, comme nous verrons, la notion d'opérateur hermitien, si important en mécanique quantique.

L'équation la plus simple que l'on puisse former avec un opérateur s'écrit  $\alpha X = aX$ , où  $a$  désigne un facteur numérique, inconnu comme le vecteur  $X$ . Cette équation est homogène en  $X$  : on peut donc supposer  $X$  unitaire ; il représente seulement une direction. Les solutions correspondantes  $a_i$  et  $X_i$  sont les valeurs propres et les directions propres ou principales de l'opérateur  $\alpha$ . La référence constructive est ici le système d'équations ordinaires qui représente l'équation vectorielle proposée : une équation de degré  $N$  exprime leur compatibilité ; si la matrice du système est symétrique, les racines sont réelles. La géométrie abstraite de l'équation vectorielle doit tabler sur l'existence de  $N$  solutions réelles ou imaginaires. Elle peut alors, par ses propres moyens, établir une théorie des valeurs et des directions propres. A une valeur multiple  $a_i = a_j = \dots$ , correspondent une infinité de directions principales, fonctions linéaires de deux ou plusieurs d'entre elles (dégénérescence). Si toutes les valeurs propres sont différentes, les  $X_i$  sont linéairement indépendants. Les directions principales de deux opérateurs conjugués forment deux systèmes mutuellement orthogonaux ;



celles d'un opérateur symétrique fournissent donc une base orthogonale.

La généralisation pour  $N$  infini est immédiate, au point de vue abstrait. Ainsi, dans l'espace infinidimensionnel, un opérateur symétrique fournit encore une base orthogonale. Cette base est discrète ou continue. Dans le second cas, les directions principales  $X$  sont fonctions d'un indice continu quelconque : un indice continu tout désigné se trouve être précisément la valeur même de la variable réelle continue  $\alpha$ . Quant au fondement analytique de la généralisation, il tient dans la théorie du passage d'un système fini d'équations homogènes, soit à un système infini, avec déterminant infini, soit à une équation intégrale linéaire de seconde espèce (classement d'HILBERT), selon que le système de référence est discret ou continu. Les conditions de l'apparition d'une suite continue de valeurs propres, dans l'un ou l'autre cas, ont fait l'objet de nombreuses recherches, depuis que HILBERT a mis en lumière la connexion des deux problèmes (1906).

La théorie de l'équation vectorielle  $\alpha X = aX$  permet de concevoir dans toute sa généralité l'idée d'un opérateur  $\beta$  fonction de  $\alpha$ . La conception originelle d'un tel opérateur découle des définitions axiomatiques de la somme et du produit de deux opérateurs : elle envisage uniquement  $\beta$  comme un polynôme en  $\alpha$ . Or les directions principales et les valeurs propres de  $\beta = f(\alpha)$  sont alors reliées très simplement à celles de  $\alpha$  : les directions propres sont identiques et l'on a  $b_i = f(a_i)$ . A la fonction tensorielle  $\beta = f(\alpha)$  correspond donc une fonction scalaire  $b_i = f(a_i)$ , si  $f$  est un polynôme. Comme on peut déterminer  $\beta$  par ses  $b_i$ , il est permis de définir  $f(\alpha)$  à l'aide de  $f(a_i)$ . Cette définition nouvelle coïncide avec la première dans le domaine primitif, mais elle s'étend à toutes les formes de  $f$ . En particulier  $f(a_i)$  peut être une série entière infinie ou même une fonction analytique quelconque. Ces considérations s'étendent naturellement à l'espace infinidimensionnel. Elles donnent à  $f(\alpha)$  un sens pourvu que  $f(a)$  en ait un,  $a$  désignant la suite infinie, discrète ou continue des valeurs propres de  $\alpha$ .

## 2. — LE PASSAGE A L'ESPACE COMPLEXE.

Ordinairement, les espaces généralisés ont été conçus, à l'origine, sur le plan même de la géométrie pure et de la géométrie physique ;

la géométrie analytique, quand elle était présente, apportait seulement une confirmation logique (la preuve de la non-contradiction des axiomes) et une méthode uniforme de développement. Ainsi, les géométries non euclidiennes sont apparues comme une critique de la géométrie euclidienne et se sont développées sans le secours de la méthode des coordonnées. De même, les géométries de RIEMANN et de CARTAN se proposent comme des extensions de la théorie des surfaces. Les initiateurs supputent la vérité physique des espaces généralisés : GAUSS envisage la mesure de la constante de courbure de l'espace physique ; RIEMANN spéculait sur les conditions physiques de la variation de la courbure d'un point à un autre, conditions que la théorie relativiste de la gravitation éclaircira dans la suite ; EINSTEIN, à qui l'on doit cette théorie, parvient d'autre part, à la suite de spéculations physiques, à l'idée d'espace à torsion, que venait de concevoir CARTAN et qu'il ne connaissait pas. Dans ces études originelles généralisant l'idée d'espace, ce n'est donc pas à proprement parler la méthode des coordonnées qui a suggéré la généralisation. L'histoire de l'idée d'espace complexe nous présente des circonstances exactement opposées.

Ici, le point de départ appartient au domaine de l'analyse algébrique. Il s'agit d'une sorte d'extension de la théorie classique des formes bilinéaires symétriques ou des formes quadratiques. Le problème fondamental de cette théorie est la réduction d'une forme telle que  $\sum a_{ij} x_i y_j$  ou  $\sum x_{ij} a_i x_j$  à une forme  $\sum c_i x_i y_i$  ou  $\sum c_i x_i^2$  par une transformation linéaire orthogonale, une transformation qui laisse invariante la forme  $\sum x_i y_i$  ou  $\sum x_i^2$ . Ce problème admet une transposition géométrique et l'on peut même dire que c'est la géométrie qui l'a inspiré : mais la généralisation ici en question et qui est due à HERMITE fut proposée en dehors de toute préoccupation géométrique ou physique. Les variables  $x_i$  et  $y_i$  deviennent des imaginaires conjuguées  $x_i$  et  $\bar{x}_i$  ; les coefficients  $a_{ij}$  sont complexes et la condition de symétrie  $a_{ij} = a_{ji}$  fait place à la symétrie hermitienne  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$  ; enfin, la forme invariante fondamentale devient  $\sum x_i \bar{x}_i$ . Le caractère hermitien de la matrice est conservé dans la transformation ; les éléments diagonaux restent donc réels et, par suite, également les coefficients  $c_i$ . On n'entrevoit, à l'origine, aucune application physique essentielle des formes bilinéaires de HERMITE : l'idée d'une géométrie hermitienne n'était même pas envisagée.

La physique quantique devait changer cette situation. En juillet

1925, date de la publication du premier mémoire d'HEISENBERG sur la mécanique quantique proprement dite, les matrices hermitiennes font leur apparition en physique, et quelques mois plus tard, grâce aux mémoires de BORN, JORDAN et HEISENBERG, il est devenu tout à fait clair que la mécanique quantique table sur un espace infinidimensionnel hermitien. La réalité physique de cet espace s'accuse nettement dans la suite, avec l'interprétation statistique générale des équations de la mécanique nouvelle. Il devient alors indispensable, pour la clarté de l'exposé des principes et des résultats physiques, d'édifier et d'utiliser une géométrie pure de l'espace ainsi conçu : ici comme pour l'espace ordinaire, le rôle de la géométrie analytique doit en effet se réduire à un contrôle des fondements au point de vue de la cohérence logique et à une méthode uniforme de calcul. L'idée d'une telle géométrie pure, infinidimensionnelle et hermitienne, fut préconisée et largement développée par DIRAC : les contributions de l'illustre algébriste à la physique des quanta sont, pour la plupart, le résultat de l'usage systématique de la méthode abstraite et symbolique, de préférence à la méthode analytique.

Dans le paragraphe qui précède, nous avons fait voir comment se généralisent dans le sens de l'espace infinidimensionnel les principes de l'espace affine, de la métricité, de l'orthogonalité et des opérateurs linéaires : nous voudrions envisager ici, au même point de vue de la géométrie pure, abstraite, symbolique, la généralisation dans le sens de l'espace complexe, sans insister d'ailleurs sur le caractère infinidimensionnel. Comme introduction, pour rattacher notre exposé de la géométrie complexe abstraite à la théorie des formes quadratiques hermitiennes, qui, nous l'avons dit, fut son origine, notons seulement ceci. La théorie classique de la réduction d'une forme quadratique par des transformations orthogonales est la transposition analytique de la théorie de la forme  $X \propto X$  de la géométrie abstraite. Il est donc naturel de considérer la forme bilinéaire d'HERMITE comme l'expression analytique d'une forme symbolique  $X' \propto X$  où  $X$  et  $X'$  sont des vecteurs qu'il convient d'appeler imaginaires. Du reste, il existe entre  $X$  et  $X'$  un certain rapport, celui précisément qui s'exprime analytiquement par la relation  $x'_i = \overline{x_i}$  entre les coordonnées de ces vecteurs. Il convient donc d'introduire dans les fondements de la géométrie abstraite complexe deux classes de vecteurs et une correspondance entre les vec-



teurs des deux classes. DIRAC envisage effectivement des vecteurs  $\psi$  et des vecteurs  $\varphi$ , et une correspondance  $(\varphi_i, \psi_i)$  marquée par l'identité de l'indice.

Ainsi, l'idée initiale de la généralisation complexe de la géométrie abstraite est la distinction de deux classes de vecteurs et, entre les vecteurs de ces deux classes, une relation de correspondance présentant une certaine analogie, mais assez lointaine, avec celle de deux complexes conjuguées. Pour symboliser cette situation initiale, nous n'utiliserons pas la notation de Dirac (vecteurs  $\psi$ , vecteurs  $\varphi$ , vecteurs imaginaires conjugués  $\psi_i$  et  $\varphi_i$ ). Nous proposons d'envisager plutôt l'opération qui fait passer d'un vecteur imaginaire au vecteur imaginaire conjugué : nous la noterons  $\varepsilon$ . En d'autres termes, nous représentons deux vecteurs conjugués par les notations  $X$  et  $\varepsilon X$ , ou  $A$  et  $\varepsilon A$ , et ainsi de suite. Nous convenons, de plus, que les vecteurs notés sans  $\varepsilon$  sont toujours de la première classe. Le passage de la géométrie abstraite non complexe à la géométrie abstraite complexe est, à notre point de vue, la théorie de l'opérateur  $\varepsilon$ . Cette théorie peut être faite abstraitement : on envisage alors les propriétés de l'opérateur sans indiquer les constructions sous-jacentes qu'il suppose. Elle peut aussi être exposée constructivement ; elle est alors assez semblable à la théorie classique des imaginaires ordinaires. Les deux méthodes sont complémentaires. Commençons par la méthode abstraite.

Notre première démarche concerne la géométrie affine. Nous supposons que les facteurs numériques  $c$  sont généralement complexes. Nous maintenons les axiomes. Ils concernent, séparément des vecteurs du type  $X$  et des vecteurs du type  $\varepsilon X$  : en aucun cas, une somme vectorielle ne peut présenter les deux types de vecteurs. De plus, nous introduisons de nouveaux axiomes, qui concernent proprement l'opérateur  $\varepsilon$  : l'axiome de distributivité

$$\varepsilon (X_1 + X_2) = \varepsilon X_1 + \varepsilon X_2,$$

l'axiome de commutation

$$\varepsilon (c X) = \bar{c} (\varepsilon X),$$

où  $\bar{c}$  est le complexe conjugué de  $c$  ; enfin l'axiome de réciprocity des vecteurs conjugués  $X$  et  $\varepsilon X$ , axiome qui peut s'écrire  $\varepsilon^2 = 1$ . L'axiome de distributivité nous présente  $\varepsilon$  comme une sorte d'opérateur linéaire ; mais l'axiome de commutation nous invite à nom-

mer  $\epsilon$  un opérateur pseudo-linéaire : la linéarité n'est pas parfaite tant que  $c$  demeure imaginaire.

Passons maintenant à la métricité. Dans l'espace non complexe, elle tient, comme nous avons vu, dans un système d'axiomes concernant le produit scalaire de deux vecteurs. Nous avons dit que l'on n'ajoute jamais deux vecteurs de types différents. Pour la multiplication, c'est exactement l'inverse : on n'envisage jamais le produit de deux facteurs de même classe. Tout produit scalaire prend donc, en géométrie complexe, une des deux formes suivantes :  $X (\epsilon Y)$  ou  $(\epsilon X) Y$ . Ces deux produits sont généralement complexes et inégaux. Pour noter un produit scalaire, nous séparerons d'un trait vertical les notations respectives des deux vecteurs. Si le vecteur de gauche est noté  $\epsilon X$ , nous écrirons ici plutôt  $X \epsilon$ , sans ambiguïté possible. Nous aurons ainsi, pour les deux produits,  $X | \epsilon Y$  et  $X \epsilon | Y$ . Les propriétés axiomatiques de linéarité et de commutativité du produit scalaire concernent maintenant  $X$  et  $\epsilon Y$ , ou  $\epsilon X$  et  $Y$  : elles sont perdues si l'on envisage les vecteurs  $X$  et  $Y$  eux-mêmes. Après avoir fait subir aux axiomes de métricité ces modifications, nous devons y joindre une relation qui concerne plus spécialement l'opérateur  $\epsilon$  lui-même :

$$X \epsilon | Y = \overline{X | \epsilon Y}$$

relation qui s'écrit avec les notations de DIRAC indiquées plus haut :

$$\varphi_p \psi_q = \overline{\varphi_q \psi_p} ;$$

cette condition remplace la symétrie pure et simple du produit scalaire de la géométrie réelle par une symétrie hermitienne. *Nous appelons hermitien l'espace imaginaire métrique ainsi caractérisé.* Notons que le produit simplement symétrique  $X \epsilon X$  est nécessairement réel : on le suppose positif. La longueur de  $X$  ou de  $\epsilon X$  est définie comme racine carrée positive de  $X \epsilon X$ . La condition d'orthogonalité de  $X$  et  $Y$  devient  $X \epsilon | Y = 0 = X | \epsilon Y$  : elle concerne plutôt  $X$  et  $\epsilon Y$  ou  $\epsilon X$  et  $Y$ .

Examinons ce que devient, dans l'espace complexe, la théorie abstraite des opérateurs linéaires. L'idée de tels opérateurs se présente déjà en géométrie affine. Le passage à l'espace complexe est ici immédiat à raison de la séparation des deux types de vecteurs : un opérateur appliqué à un vecteur engendre un vecteur de même type. En géométrie complexe métrique, la théorie des opérateurs a pour

point de départ des formes bilinéaires abstraites telles que  $X | \alpha$  ( $\varepsilon Y$ ) et  $X \varepsilon | \alpha Y$ , qui sont, l'une et l'autre des produits scalaires. La théorie ne peut se développer qu'en admettant la relation de symétrie

$$X | \alpha \varepsilon Y = Y \varepsilon | \alpha X,$$

relation qui s'écrit, avec les notations de Dirac,

$$\varphi(\alpha \psi) = (\varphi \alpha) \psi = \varphi \alpha \psi,$$

comme s'il s'agissait d'un principe d'associativité. Il faut bien distinguer cette *symétrie fondamentale*, où  $\varepsilon$  accompagne le même vecteur dans les deux membres, et la symétrie que nous allons maintenant définir.

La généralisation complexe des opérateurs conjugués de l'espace réel concerne la permutation des vecteurs  $X$  et  $Y$  eux-mêmes. Nous définissons  $\beta$ , conjugué de  $\alpha$ , par

$$X \varepsilon | \alpha Y = \overline{Y \varepsilon | \beta X}$$

soit, en vertu de la symétrie fondamentale,

$$X \varepsilon | \alpha Y = \overline{X | \beta \varepsilon Y},$$

soit encore, puisque

$$\begin{aligned} X \varepsilon | \alpha Y &= \overline{X | \varepsilon \alpha Y}, \\ X | \varepsilon \alpha Y &= X | \beta \varepsilon Y, \end{aligned}$$

ou, en abrégé,  $\varepsilon \alpha = \beta \varepsilon$ . Désignons  $\beta$ , conjugué de  $\alpha$ , par  $\bar{\alpha}$  : nous avons  $\varepsilon \alpha = \bar{\alpha} \varepsilon$ , relation toute semblable à la relation axiomatique de pseudo-linéarité de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon c = \bar{c} \varepsilon$ . Nous disons que  $\alpha$  est un *opérateur hermitien* si  $\alpha = \bar{\alpha}$  : on a alors  $\varepsilon \alpha = \alpha \varepsilon$ . Cette appellation est justifiée à raison de la relation

$$X \varepsilon | \alpha Y = \overline{Y \varepsilon | \alpha X},$$

qui exprime la symétrie hermitienne  $x_{ij} = \bar{x}_{ji}$  d'une certaine matrice construite à l'aide de l'opérateur  $\alpha$  et d'une suite de vecteurs, matrice qui peut représenter  $\alpha$  comme nous l'expliquerons au prochain paragraphe. La géométrie hermitienne ne peut naturellement pas s'en tenir aux opérateurs hermitiens, pas plus que la géométrie réelle ordinaire (produit scalaire simplement commutatif) ne peut s'en tenir aux opérateurs symétriques.

Les opérateurs hermitiens ainsi définis abstraitement sont appelés



par DIRAC des opérateurs réels. Du point de vue analytique cette appellation est justifiée à raison du caractère réel des éléments diagonaux de toute matrice représentative (repère orthogonal). En géométrie abstraite, l'appellation est en rapport avec une propriété remarquable des opérateurs hermitiens, et qui concerne l'équation  $\alpha X = a X$ . Si  $\alpha$  est hermitien, cette équation admet, pour  $a$ ,  $N$  solutions réelles. L'équation  $\alpha (\varepsilon X) = a (\varepsilon X)$  admet les mêmes solutions puisqu'elle se déduit de la première en appliquant aux deux membres (qui sont des vecteurs) l'opérateur  $\varepsilon$ , à raison des relations  $\varepsilon \alpha = \alpha \varepsilon$ ,  $\varepsilon a = a \varepsilon$ . Le cas des valeurs propres multiples s'étudie absolument comme en géométrie abstraite réelle. L'orthogonalité des directions principales d'un opérateur symétrique non dégénéré fait place, en géométrie complexe, à l'orthogonalité mutuelle des deux systèmes corrélatifs. La norme unitaire ( $X_i \varepsilon X_i = 1$ ) s'introduit de la même manière mais laisse naturellement subsister ici une indétermination : on peut toujours multiplier  $X_i$  par une quantité complexe de module unitaire, par exemple par  $\exp. [if(a)]$ .

Inutile de poursuivre. Il nous suffit d'avoir montré comment la géométrie hermitienne peut être édifiée d'une manière toute semblable à la géométrie réelle abstraite. Du reste, l'arrière-plan analytique auquel il faut s'en référer pour s'assurer de la non-contradiction des axiomes est naturellement semblable également à celui que nous avons invoqué pour la géométrie abstraite réelle ; et cela pour  $N$  fini et pour  $N$  infini. Il nous faut maintenant examiner une autre question. Nous avons dit que deux méthodes se présentaient pour le passage de la géométrie réelle abstraite à la géométrie complexe : une méthode abstraite, celle que nous venons de préciser, et une méthode constructive. Nous allons maintenant examiner la seconde. Au lieu de considérer la géométrie abstraite réelle comme un modèle pour la géométrie complexe, nous la prendrons comme un fondement. Il ne s'agit plus de voir comment la modifier pour introduire les deux classes de vecteurs et l'opérateur  $\varepsilon$  : il nous faut plutôt traiter la géométrie complexe comme une application de la géométrie réelle à certaines combinaisons spéciales, de manière à obtenir une notion constructive et non plus implicite de l'opérateur  $\varepsilon$ . Cette méthode est analogue à la méthode classique pour le traitement du symbole  $a + bi$  : la différence tient en ceci qu'au lieu de tabler uniquement sur l'algèbre des quantités réelles (scalaires) nous tablons sur l'algèbre et sur la géométrie réelle.

Observons d'abord que l'existence d'un objet formel construit correspondant à la géométrie complexe abstraite ne fait aucun doute : la géométrie complexe analytique, dont la pièce principale est la forme bilinéaire d'Hermite, apporte précisément un tel objet. Mais qu'un objet satisfaisant à cette condition puisse être présenté comme un calcul de vecteurs réels, c'est une question qui relève de la théorie des groupes et que nous n'examinons pas préalablement. Nous faisons donc une simple tentative. En fait nous obtiendrons bien l'objet cherché.

Puisqu'un vecteur imaginaire est, analytiquement, un système de trois quantités complexes, il est tout indiqué d'essayer de le concevoir comme un système de deux vecteurs réels. Mais comme il faut, d'autre part, envisager deux types de vecteurs imaginaires dès qu'il est question de produits, nous sommes assez naturellement amenés à penser qu'un vecteur imaginaire est un complexe de deux vecteurs réels qui appartiennent, d'une part, respectivement aux deux classes  $j$  et  $i$  et d'autre part, simultanément, soit à la classe  $\eta$ , soit à la classe  $\varepsilon$ . Symboliquement, un tel vecteur pourrait alors être représenté par

$$\eta (j A + i B) \quad \text{ou} \quad \varepsilon (j C + i D)$$

où  $\eta j$ ,  $\eta i$ ,  $\varepsilon j$ ,  $\varepsilon i$  indiquent simplement, pour  $A, B, C, D$ , le rôle que ces vecteurs vont jouer dans le système de conventions constructives qui doit définir les vecteurs imaginaires.

Nous avons reconnu que ce point de départ était exact et que l'on trouvait, pour le produit d'un vecteur imaginaire par un scalaire complexe et pour le produit scalaire (complexe) de deux vecteurs imaginaires, les règles constructives convenables (c'est-à-dire en harmonie avec les axiomes de la géométrie complexe abstraite) en traitant les expressions symboliques  $ja + ib$ ,  $\eta(j A + i B)$ ,  $\varepsilon(j C + i D)$  comme s'il s'agissait d'expressions algébriques (associativité et distributivité) et en transformant les résultats d'après les conventions suivantes :

$$\begin{aligned} j j &= j, & j i &= i, & i j &= i, & i i &= -j; \\ \eta j &= j \eta, & \eta i &= i \eta, & \varepsilon j &= j \varepsilon, & \varepsilon i &= -i \varepsilon, \end{aligned}$$

auxquelles il faut joindre  $\varepsilon \eta = 1$  et la commutativité des symboles  $i, j, \varepsilon, \eta$  avec les symboles tels que  $a, b, A, B, C, D$ . Les conventions en  $j$  et  $i$  sont celles des quantités complexes ordinaires (on pose géné-

ralement  $j = 1$ ) ; celles en  $\eta$  et  $\varepsilon$  concernent plus particulièrement le calcul géométrique complexe. On peut poser  $\eta = 1$ , aussi bien que  $j = 1$ . La relation  $\varepsilon i = -i \varepsilon$  est caractéristique : elle rappelle précisément la relation abstraite à laquelle devait satisfaire l'opérateur  $\varepsilon$ , savoir :  $\varepsilon c X = \bar{c} \varepsilon X$ . Grâce aux conditions qui précèdent, les résultats se trouvent être des expressions du type  $ja + ib$ ,  $\eta(j A + i B)$ ,  $\varepsilon(j C + i D)$  : il faudra les interpréter symboliquement, c'est-à-dire comme des couples de quantités réelles ou de vecteurs réels. Appliquons la méthode au produit scalaire de deux vecteurs imaginaires : nous obtenons la convention constructive

$$\begin{aligned} X | \varepsilon Y &= \eta(j A + i B) \varepsilon(j A' + i B') \\ &= j(AA' + BB') + i(BA' - AB'), \end{aligned}$$

à comparer avec la convention

$$xy = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ba' + ab'),$$

relative au produit de grandeurs scalaires complexes. La commutation des facteurs  $X$  et  $Y$  ou  $x$  et  $y$  revient à l'inversion des accents : on voit qu'elle n'a'tère pas le produit algébrique complexe mais qu'elle transforme la valeur du produit scalaire de deux vecteurs imaginaires en sa conjuguée complexe. Ainsi, l'objet que nous avons construit satisfait précisément à la convention de Dirac : en géométrie abstraite, il était nécessaire d'introduire cette condition à côté des axiomes formés par analogie avec ceux de la géométrie réelle. Observons que la seconde convention supplémentaire de DIRAC ( $X \varepsilon X$  positif) découle également de la règle de multiplication ci-dessus : en faisant  $A = A'$ ,  $B = B'$ , il reste en effet, dans le second membre,  $A^2 + B^2$ , qui est positif en géométrie euclidienne. On voit ainsi que le sens des limitations que DIRAC introduit dans son calcul abstrait, comme des conditions supplémentaires : elles reviennent à supposer que les vecteurs imaginaires sont des couples de vecteurs de la géométrie réelle et euclidienne. Notons, à cette occasion, que les géométries pseudo-euclidiennes (forme quadratique dont les coefficients ne sont pas tous positifs) ne sont pas à proprement parler des géométries complexes : elles n'introduisent que des grandeurs purement imaginaires et cette introduction même est subordonnée au désir de continuer à présenter la forme quadratique réduite comme une somme de carrés et à envisager les longueurs plutôt que leur carré.



## 3. — LA RÉDUCTION A L'ORDRE SCALAIRE COMPLEXE.

A un certain point de vue, logiquement le plus élevé, le formel construit précède le formel abstrait : il en est l'unique fondement valable. L'existence même d'un groupe abstrait n'est démontrée que par son isomorphisme avec un groupe constructif, arithmétique, analytique. Toute définition implicite, caractérisant l'objet par ses seules propriétés, s'adosse à une définition constructive, explicite. En ce sens, la géométrie analytique précède la géométrie pure. Le mouvement de la pensée est pourtant inverse en certains cas. Assez souvent, l'idée généralisatrice naît sur le plan formel abstrait : la référence au constructif apparaît alors comme une démarche secondaire. Il arrive aussi que la science physique suggère elle-même un schème formel abstrait. C'est précisément ce que nous présente l'histoire de la géométrie ; la science de l'espace s'est créé les schèmes abstraits nécessaires ; l'intuition spatiale paraissait démontrer à suffisance leur cohérence. La géométrie analytique elle-même conservait, à l'origine, pour ses fondements, l'intuition spatiale et les schèmes abstraits corrélatifs : la base de l'édifice analytique ne devient proprement constructive qu'au moment où l'idée de congruence géométrique est mise en corrélation avec l'idée de groupe analytique. Il est sans doute permis d'affirmer que le domaine propre de la géométrie est sur le plan du formel abstrait, et que ce sont des problèmes, pour elle non essentiels, qui la portent sur le plan du formel constructif, analytique. C'est pour cette raison que nous avons examiné d'abord du point de vue abstrait, implicite, symbolique, la généralisation infinidimensionnelle et la généralisation complexe hermitienne de la géométrie : nous nous sommes ainsi placés sur le terrain de la géométrie pure. Il nous faut maintenant examiner, pour les généralisations en question, le passage de la géométrie pure à la géométrie analytique.

La représentation d'un vecteur  $A$  par une suite de nombres se présente déjà en géométrie affine : elle précède la métricité. Son principe est le développement de  $A$  en une somme géométrique de vecteurs respectivement dirigés suivant  $N$  vecteurs  $X_i$  linéairement indépendants, et qui constituent une base. Cette base sert à la représentation de tous les vecteurs et devient un repère. Les nombres représentatifs de  $A$ , appelés coordonnées du vecteur, sont les coeffi-

cients  $[A]_i$  des  $X_i$ . En géométrie complexe, il faut nécessairement envisager deux repères, un pour les vecteurs du type  $\eta$ , un autre pour les vecteurs du type  $\varepsilon$ , puisque la somme géométrique concerne toujours des vecteurs de même type. Notons que l'utilisation simultanée de deux repères n'appartient pas exclusivement à la géométrie complexe : la géométrie réelle métrique envisage des repères réciproques, et il faut les employer constamment dans l'étude des espaces courbes. En fait, les deux repères de la géométrie complexe sont généralement conjugués : on les déduit, l'un de l'autre, en appliquant l'opérateur  $\varepsilon$  à chaque vecteur fondamental. On a, dans ce cas, les deux développements géométriques

$$A = \sum \left| \frac{A}{X} \right|_i X_i, \quad \varepsilon A = \sum \varepsilon \left| \frac{A}{X} \right|_i X_i = \sum \left| \frac{\bar{A}}{X} \right|_i (\varepsilon X_i) = \sum \left| \frac{A}{\varepsilon X} \right|_i (\varepsilon X_i),$$

où le symbole  $\left| \frac{A}{X} \right|_i$  note à la fois le vecteur représenté, la base et l'axe coordonné : les coordonnées des vecteurs  $A$  et  $\varepsilon A$  sont des quantités complexes conjuguées. En géométrie infinidimensionnelle, il faut envisager des sommes vectorielles infinies et des intégrales vectorielles, des concepts dont la justification relève, nous l'avons dit, de l'analyse fonctionnelle. Dans le second cas, la suite des coordonnées devient continue et s'exprime par une fonction densitaire  $f(x)$  de l'indice continu  $x$ , dont la différentielle figure sous le signe intégral.

La représentation analytique d'un opérateur linéaire abstrait  $\alpha$  découle de la représentation du vecteur  $\alpha X_j$ , où  $X_j$  est un vecteur fondamental quelconque de la base. Dans le développement

$$\alpha X_j = \sum \left| \frac{\alpha X_j}{X} \right|_i X_i,$$

les coefficients des  $X_i$  sont à la fois les coordonnées du vecteur  $\alpha X_j$  et les coordonnées de l'opérateur  $\alpha$ . Comme  $j$  varie aussi bien que  $i$ , de 1 à  $N$ , ces dernières forment une matrice. On convient de faire une colonne de toutes les coordonnées d'un même vecteur  $\alpha X_j$  : la matrice représentative de  $\alpha$  se note donc  $[\alpha_{ij}]$ . Avec cette convention et à raison de la distributivité de l'opérateur  $\alpha$ , le produit  $\alpha\beta$  est représenté par le produit des matrices de  $\alpha$  et de  $\beta$ . On a, de même, pour  $U = \alpha V$ , la relation scalaire fondamentale

$$\left| \frac{U}{X} \right|_j = \sum_i \alpha_{ji} \left| \frac{V}{X} \right|_i,$$

où les indices s'enchainent comme dans la multiplication des matrices.

Cette relation est fondamentale, d'abord parce qu'elle permet d'écrire sous forme scalaire l'équation vectorielle  $\alpha A = a A$ , qui est la base de la théorie des opérateurs linéaires. Elle l'est encore, à notre point de vue, pour cette raison qu'elle donne lieu à une généralisation purement analytique pour  $N$  infini, généralisation qui est le fondement de la représentation d'un opérateur  $\alpha$  par une matrice infinie ou par une fonction de deux variables continues. Envisageons le second cas. Notons que l'expression  $\int \alpha(x, y) V(y) dy$  peut être considérée comme le résultat de l'opérateur scalaire  $\int \alpha(x, y) \dots dy$  à la fonction  $V(y)$  et que les opérateurs de ce type se composent comme les opérateurs linéaires de l'algèbre, donc de la même manière que les matrices se multiplient. Notons aussi que l'équation vectorielle  $\alpha A = a A$  s'exprime ici analytiquement par une équation intégrale linéaire de seconde espèce.

Ces conceptions s'étendent immédiatement à la représentation d'un opérateur  $\alpha$  de l'espace complexe. On obtient naturellement des représentations différentes  $\alpha_{ij}$  et  $\alpha'_{ij}$ , selon que l'on utilise une base en  $\eta$  ou une base en  $\varepsilon$ . A ce sujet, observons qu'en prenant le  $\varepsilon$  du développement de  $\alpha X_j$ , les termes prennent la forme  $\bar{\alpha}_{ij} (\varepsilon X_i)$  : la règle de commutation  $\varepsilon \alpha = \bar{\alpha} \varepsilon$  permettrait donc d'obtenir une représentation de base  $\varepsilon$  faisant figurer  $\bar{\alpha}_{ij}$ , mais elle concernerait l'opérateur  $\bar{\alpha}$ . Du reste, nous sortirions ainsi de la géométrie affine prémétrique, puisque l'idée même d'opérateur conjugué relève, nous l'avons expliqué, de la métricité. En fait, les relations entre les deux représentations en  $\varepsilon$  et en  $\eta$  d'un opérateur de l'espace complexe n'apparaissent qu'avec la géométrie métrique, à laquelle nous arrivons maintenant.

La représentation analytique du produit scalaire de deux vecteurs  $A$  et  $B$  par une forme algébrique bilinéaire symétrique des coordonnées de  $A$  et de  $B$  résulte de ses propriétés axiomatiques de distributivité et commutativité. Les deux suites de variables sont les coordonnées des deux vecteurs ; les coefficients sont les produits scalaires  $X_i X_j$  des vecteurs fondamentaux. Cette forme bilinéaire est le fondement de la métricité en géométrie analytique. Elle ramène la science de l'espace métrique à l'étude de la structure d'un sous-groupe du groupe des transformations linéaires des coordonnées, lequel caractérisait l'espace affine : ce sous-groupe est défini par la condition d'invariance de la forme bilinéaire fondamentale.



Au lieu d'un repère unique pour  $A$  et pour  $B$ , on peut aussi envisager des repères distincts pour les deux facteurs vectoriels : les coefficients de la forme bilinéaire sont alors des produits scalaires  $X_i Y_j$ . Si les deux bases sont réciproques, la forme bilinéaire se réduit à

$$\sum \left| \begin{array}{c} A \\ X \end{array} \right|_i \left| \begin{array}{c} B \\ Y \end{array} \right|_i \quad \text{ou} \quad \sum A^i B_i ;$$

si les deux bases réciproques se confondent, leur orthogonalité mutuelle fait place à l'orthogonalité propre de la base unique, et la condition des produits unitaires, à celle des vecteurs fondamentaux unitaires. Les expressions ainsi réduites de la forme bilinéaire de métricité sont le point de départ habituel de la géométrie analytique cartésienne exposée méthodiquement du point de vue essentiel des groupes.

La généralisation pour l'espace complexe est immédiate. Le produit scalaire est ici encore, et pour la même raison, représenté par une forme algébrique bilinéaire. L'analogie n'est pourtant pas complète : la commutativité pure et simple du produit scalaire fait place, en géométrie complexe, à la règle de déplacement de  $\varepsilon$ , que nous avons étudiée au paragraphe précédent. Il existe donc deux formes bilinéaires de métricité. L'une donne le produit  $A | \varepsilon B$  : ses coefficients sont  $X_i | \varepsilon X_j$  ; l'autre concerne  $A \varepsilon | B$  et présente les coefficients  $X_i \varepsilon | X_j$ . Elles sont conjuguées. D'autre part, la forme bilinéaire n'est plus simplement symétrique : à raison de la règle de commutation, la matrice des coefficients présente la symétrie hermitienne : l'espace complexe métrique est essentiellement hermitien. Ces différences n'empêchent pas d'envisager, ici encore, l'expression réduite de la forme fondamentale au cas des repères réciproques ( $X_i \varepsilon Y_j = \delta_{ij}$ ) et au cas des repères réciproques conjugués ( $X_i \varepsilon X_j = \delta_{ij}$ ). Dans le premier cas, on aurait une théorie toute semblable à l'analyse vectorielle réelle, représentant les vecteurs et les tenseurs par des suites et des matrices covariantes et contravariantes. Dans le second cas, on n'a qu'une seule représentation, comme en géométrie réelle quand le repère est rectangulaire. Observons que la théorie analytique des espaces courbes introduit nécessairement les bases réciproques. Les physiciens sont donc venus aux repères obliques avec la théorie relativiste de la gravitation. Dans la physique infinidimensionnelle de l'atome, on n'envisage que des systèmes de vecteurs issus d'un même point : on peut s'en tenir à la

représentation orthogonale normée (repères réciproques conjugués). Les quantités complexes représentant un vecteur (ses coordonnées) sont alors précisément égales à la mesure des projections orthogonales de ce vecteur sur le repère de type opposé, ces projections étant définies, comme nous l'avons proposé précédemment, à l'aide du produit scalaire.

Nous avons déjà examiné la représentation d'un opérateur  $\alpha$  par une matrice et observé que, sans la métricité, il ne s'établissait pas un lien entre les deux matrices représentatives  $[\alpha_{ij}]$  et  $[\alpha'_{ij}]$ , relatives à leurs repères correspondants en  $\eta$  et en  $\epsilon$ . Voyons ici comment la métrique introduit une telle relation, dans le cas de deux repères réciproques conjugués, disons simplement dans le cas d'une représentation orthogonale. Le développement de  $\alpha X_j$  qui donne, en géométrie réelle, la matrice représentative  $[\alpha_{ij}]$  de  $\alpha$  vaut encore, en géométrie complexe, pour une base du type  $\eta$ . Multiplions par  $\epsilon X_k$  nous obtenons la relation scalaire

$$X_k \epsilon | \alpha X_j = \sum \alpha_{ij} X_i | \epsilon X_k = \alpha_{kj},$$

qui fournit les coordonnées de l'opérateur relativement au premier repère. On obtiendrait, de même,

$$\alpha'_{kj} = X_k | \alpha \epsilon X_j, \quad \text{soit} \quad X_j \epsilon | \alpha X_k$$

en vertu de la symétrie conventionnelle fondamentale. D'où  $\alpha'_{kj} = \alpha_{jk}$  : une matrice représentative est donc la transposée de l'autre.

Nous en déduisons, pour  $U = \alpha V$ , les deux représentations :

$$U_i = \sum_j \alpha_{ij} V_j, \quad \overline{U}_i = \sum_j \overline{V}_j \alpha_{ji},$$

où nous avons disposé les facteurs de manière à enchaîner les indices comme dans la multiplication des matrices. La seconde relation est remarquable. Elle n'est pas identique à la conjuguée complexe de la première puisqu'on n'a pas, généralement,  $\overline{\alpha_{ij}} = \alpha_{ji}$ . Reportons-nous à l'expression de  $\alpha_{ij}$  à l'aide de  $\alpha$  et aussi à la définition des opérateurs conjugués : cette égalité équivaut à la condition  $\overline{\alpha} = \alpha$ , par laquelle nous avons défini les opérateurs hermitiens. Ainsi, dans le cas d'un opérateur hermitien, les deux représentations analytiques de l'opération  $\alpha V$  se tirent, l'une de l'autre, par le changement de  $\sqrt{-1}$  en  $-\sqrt{-1}$ . Il existe donc ici une corré-

lation extrêmement simple entre l'idée des deux repères géométriques et celle des deux égalités impliquées dans toute égalité analytique entre quantités complexes du type  $a + bi$ .

En géométrie réelle, parmi les opérateurs non symétriques, on envisage en premier lieu les rotations : elles jouent, en géométrie analytique, un rôle fondamental puisqu'elles définissent (composées avec les translations) le groupe des transformations dont les invariants ont une signification géométrique. De même en géométrie hermitienne, parmi les opérateurs non hermitiens, il faut compter d'abord des opérateurs qu'il convient d'appeler, par analogie, des rotations. Ces rotations sont hermitiennes en ce sens qu'elles concernent l'espace hermitien mais non pas en tant qu'opérateurs de cet espace. Plaçons-nous au point de vue analytique des représentations orthogonales et normées (norme 1). Désignons par  $T$  la matrice représentative d'un opérateur et par  $\hat{T}$  la matrice transposée (échange des deux indices  $i$  et  $j$ ) : si la matrice  $T \hat{T}$  est diagonale et unitaire, et alors seulement,  $T$  est une rotation. En géométrie hermitienne, la rotation est semblablement définie analytiquement par  $T \hat{T} = [1]$ , soit, en décomposant, par un système de relations en  $\delta_{ij}$ . La même rotation  $T$  appliquée à tous les vecteurs fondamentaux  $X_i$  du repère engendre un second repère, également orthogonal et normé,  $Y$  : les éléments de la matrice sont alors de la forme  $X_i | \varepsilon Y_j$  ou  $X_i \varepsilon | Y_j$ . C'est à raison de leur rôle possible, que ces produits scalaires sont parfois appelés des *coefficients de transformation* alors même qu'il n'est pas question de transformation analytique (changement de repère). Si  $N$  est infini et si un repère est formé d'une suite continue de vecteurs, ces coefficients font place à des *fonctions de transformation*.





## CHAPITRE II

### L'utilisation quantique de l'espace hermitien.

---

#### 4. — ENSEMBLE DYNAMIQUE ET AXE DES PROBABILITÉS.

Les éléments constitutifs d'un système physique traitable par la mécanique sont des opérateurs linéaires d'un espace infini-dimensionnel hermitien. De plus, les opérateurs sont eux-mêmes hermitiens : abstraitement, ils jouissent d'une pseudo-symétrie analogue à celle du produit scalaire de deux vecteurs imaginaires ; analytiquement, ils sont représentés par des matrices complexes pseudo-symétriques analogues à la matrice de la forme algébrique bilinéaire fondamentale de métricité. Nous les appellerons les *grandeurs quantiques* du système. A raison de ce caractère hermitien, les valeurs propres d'une grandeur quantique sont réelles ; elles représentent, physiquement, les valeurs possibles d'une grandeur scalaire correspondant à la grandeur quantique.

Nous allons maintenant préciser l'idée d'*ensemble dynamique* de grandeurs quantiques en examinant successivement ses caractères. D'abord, un tel ensemble contient généralement  $3n$  grandeurs quantiques. Le nombre 3 indique ici la correspondance de chaque grandeur avec un axe d'un repère de l'espace tridimensionnel ordinaire. Du moins, les grandeurs quantiques d'un ensemble dynamique doivent présenter une invariance euclidienne tridimensionnelle (dans la mécanique quantique relativiste de l'électron unique, cette invariance fait place à l'invariance quadridimensionnelle). Parmi les ensembles dynamiques de grandeurs quantiques, notons les  $3n$  grandeurs que l'on nomme coordonnées, et aussi les  $3n$  impulsions : ces grandeurs ne correspondent généralement pas à des coordonnées et des impulsions cinématiques ; la correspondance aux trois axes d'un repère tridimensionnel est ici évidente.

Ajoutons que l'opérateur-énergie  $H$  dont les valeurs propres  $W_i$  sont bien des énergies au sens ordinaire, appartient, lui aussi, à un ensemble dynamique d'opérateurs.

D'autre part, les grandeurs quantiques d'un même ensemble dynamique sont des opérateurs permutables. Cette commutativité  $\alpha \beta = \beta \alpha$  de deux opérateurs est étroitement liée à l'idée de directions principales communes à  $\alpha$  et à  $\beta$ . Nous ne pouvons pas affirmer que les opérateurs commutatifs  $\alpha$  et  $\beta$  ont absolument le même système de directions principales mais seulement ceci : les directions principales communes constituent, au point de vue de la géométrie infinidimensionnelle, un *système complet*, une base. Un vecteur quelconque peut donc être décomposé selon la base commune ; analytiquement, un vecteur peut être représenté par ses coordonnées relatives à ce repère. Inversement, la possibilité de représenter un vecteur arbitraire relativement aux directions principales communes à plusieurs grandeurs quantiques implique la commutativité de celles-ci.

L'ensemble dynamique de grandeurs quantiques doit encore satisfaire à une autre condition. Envisageons un vecteur principal normé commun  $V$  : il lui correspond pour chaque grandeur quantique  $\alpha$ ,  $\beta$ ... de l'ensemble, une valeur propre  $a_i$ ,  $b_j$ ... Il existe donc une correspondance univoque allant d'un vecteur principal normé commun à un ensemble de valeurs propres. La condition que nous visons consiste alors en ceci que cette correspondance univoque est supposée réciproque :  $V(a_i, b_j, \dots)$  est unique. Plus précisément, la condition est un peu plus restrictive et se décompose comme suit : aucune grandeur quantique de l'ensemble n'est (comme opérateur) fonction des autres ; aucune grandeur extérieure n'est à la fois permutable avec les grandeurs de l'ensemble et inexprimable en fonction de celles-ci. L'ensemble dynamique de grandeurs quantiques est, en ce sens, un *ensemble complet d'opérateurs*.

Concernant la conception des ensembles dynamiques de grandeurs quantiques, on ajoute aussi la condition qu'ils sont deux à deux, canoniquement conjugués. On admet qu'à un ensemble correspond un autre ensemble et qu'à chaque grandeur du premier correspond une grandeur du second. Et inversement. La condition ici visée et qu'on nomme la *condition quantique* est une certaine règle de commutation concernant deux grandeurs correspondantes. Cette condition n'a pas le caractère fondamental des conditions qui pré-

cèdent : elle ne figure pas, en effet, dans les axiomes statistiques. Les grandeurs conjuguées possèdent bien des propriétés statistiques spéciales et qui sont extrêmement remarquables ; mais ces propriétés dérivent de leur définition algébrique, une fois admis les principes généraux. Nous allons maintenant examiner, du point de vue de la géométrie infinidimensionnelle hermitienne abstraite, le fondement statistique de la mécanique quantique : nous pouvons, dans cette question, laisser entièrement de côté la condition quantique.

Le principe statistique concerne deux ensembles dynamiques, c'est-à-dire deux ensembles satisfaisant aux conditions essentielles que nous venons d'examiner, savoir : premièrement, les grandeurs d'un ensemble sont permutable ; en second lieu, elles forment un ensemble complet d'opérateurs. Nous appellerons *état*  $a_i$  d'une *grandeur quantique*  $\alpha$ , la valeur propre  $a_i$  de  $\alpha$ , *considérée comme événement* ; de même l'état  $a_i, b_j, \dots$  d'un ensemble dynamique  $\alpha, \beta, \dots$  est l'événement amenant l'ensemble de valeurs propres  $a_i, b_j, \dots$ , une pour chaque grandeur quantique. Comme il existe une relation univoque et réciproque entre l'état de l'ensemble et un vecteur principal normé commun, *l'état de l'ensemble peut être représenté par ce vecteur*. On suppose alors pour les deux vecteurs représentant l'état des deux ensembles, des conditions différentes : pour le premier vecteur, on considère uniquement la statistique de ses positions, dans un intervalle de temps par exemple ; pour le second, on envisage sa position même. On exprime généralement cette supposition en disant que l'on examine la probabilité d'un état du premier ensemble dans le cas d'un état certain du second.

Plus généralement, au lieu de ces deux ensembles dynamiques avec leur repère et leurs états, il y a, d'un côté, l'état  $a_i$  d'une simple grandeur quantique quelconque  $\alpha$  et de l'autre, un vecteur unitaire  $\Omega$  qui n'est pas nécessairement un vecteur fondamental du repère associé à un ensemble dynamique. La coïncidence du vecteur  $\Omega$  avec un tel vecteur fondamental indique précisément la réalisation certaine de l'état correspondant : elle est seulement un cas particulier. *Il s'introduit donc un vecteur nouveau,  $\Omega$ , qui régit le poids statistique des valeurs propres d'une grandeur quantique quelconque du système physique. Nous proposons d'appeler ce vecteur unitaire  $\Omega$  de l'espace infinidimensionnel hermitien, l'axe des probabilités du système.*

Cela posé, l'énoncé du principe statistique est extrêmement sim-



ple. Considérons le nombre statistique  $P(a_i)$  des apparitions de l'état  $a_i$  de la grandeur quantique  $\alpha$ . On a l'axiome unique suivant :

$$\sum_i P(a_i) a_i = \Omega \varepsilon | \alpha \Omega,$$

relation dont le premier membre peut être appelé valeur moyenne de  $a$  ou de  $\alpha$ . Décomposons  $\Omega$  et  $\varepsilon\Omega$  suivant les deux systèmes de vecteurs principaux  $A_i$  et  $\varepsilon A_i$  de  $\alpha$ , systèmes orthogonaux à raison de son caractère hermitien, et de plus supposés normés : de l'axiome précédent on déduit :

$$P(a_i) = (A_i | \varepsilon \Omega) (A_i \varepsilon | \Omega) = \left| A_i | \varepsilon \Omega \right|^2,$$

relation qui égale la fréquence d'un état  $a_i$  de  $\alpha$  au carré du module de l'une ou l'autre des deux projections orthogonales hermitiennes de  $\Omega$  sur  $A_i$ . Si la direction de  $\Omega$  ne peut que coïncider avec l'un ou l'autre des vecteurs fondamentaux  $R_i$  du repère attaché à un ensemble dynamique de grandeurs quantiques  $\rho$ , les produits scalaires sont du type  $A_i \varepsilon R_j$  ; ils sont précisément les coefficients de transformation relatifs aux repères  $A$  et  $R$ .

La généralisation pour le cas d'une série continue de valeurs propres, soit du côté de  $\alpha$ , soit du côté de  $\Omega$ , est en rapport avec la généralisation de l'idée de norme ; l'événement ne concerne plus alors une valeur propre mais plutôt un petit intervalle de variation des valeurs propres ; la relation  $\sum P^2(a_i) = 1$  est maintenue autant qu'il est possible. S'il y a continuité du côté du repère ( $\alpha$ ,  $\beta$ ...), les suites de coefficients de transformation font place à des fonctions de transformation  $\Psi_{\Omega}^*(a, b, \dots)$ . On appelle ces fonctions des *ondes de probabilités* ; le terme d'ondes est ici justifié par le fait que la fonction  $\Psi_{\Omega}^*$  est généralement une fonction continue du temps  $t$  et de  $3n$  variables  $a, b, \dots$ , analogues à des coordonnées cartésiennes. Les ondes de probabilités se propagent dans un espace de configuration à  $3n$  dimensions, où  $n$  peut être infini ; lorsque  $n = 1$ , il devient possible que les ondes s'étendent dans l'espace ordinaire.

Supposons maintenant qu'il ne s'agisse que de savoir si une probabilité est nulle ou non nulle. Il est alors inutile d'envisager le carré du module : on peut s'en référer directement à  $(\Omega | \varepsilon A_i)$  ; considérons la décomposition géométrique

$$\Omega = \sum (\Omega | \varepsilon A_i) A_i$$

de l'axe des probabilités suivant les vecteurs principaux normés de  $A_i$ . Envisageons des positions  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\Omega_3 = c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2$  de l'axe, donc trois états certains. Si l'on a, pour telle valeur,  $j$  par exemple, de l'indice  $i$ ,  $\Omega_3 | \varepsilon A_j \neq 0$ , on aura, en vertu de la linéarité, soit  $\Omega_1 | \varepsilon A_j \neq 0$  soit  $\Omega_2 | \varepsilon A_j \neq 0$ , soit les deux relations à la fois. Vu la signification statistique de ces inégalités, nous avons donc la proposition suivante : si un état  $a_j$  de  $\alpha$  peut apparaître quand l'axe des probabilités prend la direction  $\Omega_3$ , il apparaîtra, avec quelque probabilité non nulle, soit quand  $\Omega$  coïncide avec  $\Omega_1$ , soit quand il coïncide avec  $\Omega_2$ , soit dans les deux cas à la fois. L'axe des probabilités peut toujours être décomposé en une infinité d'axes tels que  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ..., pour lesquels la proposition subsiste.

Cette proposition découle de l'axiome statistique : elle est loin de lui être équivalente puisqu'elle concerne la discrimination des probabilités nulles et non nulles, et absolument pas la valeur des probabilités non nulles. Elle est pourtant fondamentale à un certain point de vue. Elle fait intervenir l'idée de grandeur quantique, celle d'état d'une grandeur, celle d'axe des probabilités. *Elle peut servir de point de départ pour un exposé symbolique de la mécanique quantique, ne comportant pas de préambule géométrique concernant l'espace infinidimensionnel hermitien, mais introduisant des axiomes équivalents à propos de symboles ayant un sens physique déterminé.* Un tel exposé nous est présenté par DIRAC dans son ouvrage capital sur les *Principes de la mécanique des quanta*. Il ne s'agit pas ici de vecteurs, d'opérateurs linéaires ou tenseurs au sens purement géométrique, mais d'états  $\psi$ , d'observables  $\alpha$ , de résultat  $a$ . La proposition en question s'appelle alors le *principe de la superposition des états*, principe qui est proposé avant toute axiomatique d'ordre géométrique ; c'est aux notions que ce principe met en œuvre que se rapportent précisément les conventions de calcul qui tiennent lieu de cette axiomatique. En ce sens, DIRAC peut affirmer que ce principe « constitue la base de la mécanique quantique ».

## 5. — LA DÉRIVATION QUANTIQUE.

A côté des conditions d'invariance euclidienne, de commutation et d'indépendance qui caractérisent un ensemble dynamique de grandeurs quantiques  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{3n}$ , la physique des quanta envisage

une condition concernant l'association de deux ensembles dynamiques  $\alpha_1 \dots$  et  $\beta_1 \dots$ , et qui s'exprime généralement par

$$\beta_r \alpha_s - \alpha_s \beta_r = \frac{h}{2\pi i} \partial_{rs},$$

relation découverte par HEISENBERG et appelée par lui « condition quantique ». Elle apparut d'abord dans le champ des applications du « principe de correspondance » de BOHR, et dans la suite, elle fut rattachée, notamment par DIRAC, à un autre principe analogique reliant également la théorie des quanta à la dynamique classique de LAGRANGE, POISSON et HAMILTON. Nous voudrions ici présenter la condition quantique sans aucun appel aux analogies d'ordre physique. Plus précisément nous ferons voir qu'elle équivaut à l'introduction du coefficient réel  $h' = h/2\pi$  devant un opérateur hermitien qui s'associe à un opérateur hermitien donné aussi naturellement que la dérivée à une fonction d'une variable.

Nous atteindrons notre but en examinant successivement les points suivants. Premièrement, étant donné un opérateur hermitien  $\alpha$  dont les valeurs propres forment une suite continue, on peut définir, sous réserve d'une certaine indétermination, un opérateur  $\partial/\partial\alpha$ . Second point : la définition reste valable pour les opérateurs d'un ensemble dynamique de grandeurs quantiques ; plus précisément, l'indétermination n'est pas accrue. Troisième point : l'opérateur  $\partial/\partial\alpha$  n'est pas hermitien mais le devient, une fois multiplié par  $i$  ; l'opérateur  $i\partial/\partial\alpha$  peut donc être appelé la *dérivée hermitienne* relative à  $\alpha$ . Dernier point : *lorsqu'elle apparaît dans une équation de mécanique quantique, la dérivée hermitienne est toujours affectée du coefficient réel  $-h/2\pi$ , où  $h$  est la constante de Planck.* C'est là, selon nous, l'expression la plus essentielle de la « condition quantique ». Nous proposons d'appeler *dérivée quantique* le produit de la dérivée hermitienne par ce coefficient. D'autre part, une certaine dérivée relative au temps,  $\partial X/\partial t$  est toujours précédée du facteur  $-ih/2\pi$  : nous verrons, au paragraphe suivant, que la situation est, sur ce point, toute pareille. En somme, *la constante  $h$  des équations de la physique des quanta résulte uniquement, en principe, des dérivations quantiques : dérivations relatives à une grandeur quantique et dérivations temporanées.*

Pour achever de caractériser ce point de vue, notons qu'il est très proche de celui de la mécanique ondulatoire de Louis DE BRO-



GLIE et SCHÖDINGER. La condition quantique s'efface, dans les deux cas, de la même manière. Nous n'avons plus ici une relation de commutation, constituant un principe indépendant. Malgré les nombreuses analogies et interprétations physiques, cette relation restait étrange. Le principe de correspondance, sous sa forme essentielle (passage de la dérivation relative aux moments normaux,  $\partial/\partial J$ , à des différences finies), avait donné, dans la théorie de la dispersion, une formule qui en était un cas particulier (KUHN et THOMAS, indépendamment) ; il avait indiqué, ensuite, à HEISENBERG, dès son premier mémoire sur le calcul nouveau des grandeurs quantiques, la relation générale ; il avait permis d'interpréter cette relation comme une condition évidente relative à la dispersion des ondes de fréquence infinie (KRAMERS). D'autre part, DIRAC avait signalé l'analogie de la condition avec les équations de la dynamique classique concernant les « crochets » de POISSON. La règle de commutation, malgré les efforts de cette sorte, demeurait obscure. Toute la lumière se fit dès que SCHRÖDINGER et PAULI eurent découvert le lien qui unissait la mécanique quantique et la mécanique ondulatoire, qui, l'une et l'autre, avaient poursuivi, mais dans des voies différentes, l'analogie avec la dynamique classique. La condition quantique, comme règle de commutation, était mise en rapport avec l'identité

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x} \right) f = f,$$

où  $x$  est une variable réelle et  $f$  une fonction dérivable quelconque. Il convenait donc de développer la théorie des opérateurs linéaires de l'espace infinidimensionnel hermitien, du côté de la dérivation des coordonnées  $X(a)$  d'un vecteur rapporté aux vecteurs principaux  $A$  d'un opérateur  $\alpha$ . D'où la théorie de l'opérateur  $\partial/\partial \alpha$ , élaborée par DIRAC.

Soit  $\alpha$  un opérateur linéaire hermitien dont les valeurs propres  $a$  parcourent tout le domaine continu des nombres réels, et  $X$  un vecteur quelconque du type  $\eta$ . Envisageons les coordonnées  $X(a)$  de  $X$  relativement au système des vecteurs principaux normés  $A$  (du type  $\eta$ ) de  $\alpha$ . Le vecteur de coordonnées  $\partial X(a)/\partial a$  peut être considéré comme le produit d'un opérateur par le vecteur  $X$ . Or, en vertu des propriétés fondamentales de la dérivation, notamment son caractère distributif, cet opérateur satisfait aux axiomes

de la géométrie abstraite concernant les opérateurs linéaires : il est un opérateur linéaire au sens géométrique, un tenseur. Cet opérateur dépend uniquement de  $\alpha$  : il est naturel de le désigner par  $\partial/\partial\alpha$ . Plus précisément, il dépend du système normé  $A$  ; et comme ce système n'est pas absolument déterminé par la normalisation, comme il est toujours permis de multiplier chacun des vecteurs principaux par un facteur de module unitaire, soit par  $\exp. [if(a)]$ , il existe une indétermination corrélative pour  $\partial/\partial\alpha$  ; en fait, elle s'exprime par l'addition du terme  $i\partial f/\partial a$ .

Une telle définition de  $\partial/\partial\alpha$  n'est pas une définition constructive. Encore qu'elle utilise la dérivation ordinaire, qui est bien une conception constructive, arithmétique, analytique, elle ne construit pas son objet : elle en donne la propriété essentielle. Elle n'est donc pas logiquement comparable, par exemple, à la définition de la dérivation ordinaire. Il faut plutôt la comparer à la définition implicite d'une intégrale comme fonction primitive ; le terme complémentaire d'indétermination évoque du reste la comparaison. Ajoutons que l'utilisation des matrices représentatives ne nous conduit pas encore, dans le cas présent, à un point de vue constructif. En effet, le repère est ici une suite continue de vecteurs : dans ce cas, la décomposition d'un vecteur fondamental suivant le système continu des vecteurs fondamentaux du repère présente, au lieu des coordonnées  $\delta_{ij}$ , les fonctions  $\delta(a' - a'')$  de DIRAC, qui sont purement abstraites, purement symboliques. Or les éléments de la matrice représentant l'opérateur  $\alpha$  relativement à ses propres axes ont précisément pour expression  $a' \delta(a' - a'')$ . Nous restons donc dans l'abstrait. A plus forte raison, il ne peut être question que d'une matrice symbolique si l'on tente de représenter l'opérateur  $\partial/\partial\alpha$ . En fait, toujours pour le repère constitué par les vecteurs principaux  $A$  de  $\alpha$  ; cette matrice peut s'écrire  $\delta'(a' - a'')$ , où la fonction symbolique  $\delta'(x)$  est définie implicitement par des relations qui autorisent à la considérer comme la dérivée de  $\delta(x)$ . En d'autres termes, l'intégrale représentative fondamentale du produit d'un opérateur quelconque  $\gamma$  par un vecteur quelconque  $X$ , soit  $\int \gamma(a', a'') X(a'') da''$ , est égale à  $\partial X(a')/\partial a'$  si  $\gamma(a', a'')$  devient  $\delta'(a' - a'')$  et sous les conditions qui définissent  $\delta$  et  $\delta'$ , de même qu'elle est égale à  $a' X(a')$  si  $\gamma(a', a'')$  est remplacé par  $a' \delta(a' - a'')$  et sous les conditions qui définissent  $\delta$ .

Les propriétés de l'opérateur  $\partial/\partial\alpha$  se déduisent de l'une ou

l'autre des deux définitions implicites de l'opérateur, par  $\partial X / \partial \alpha$  ou par  $\delta' (a' - a'')$ . Elles sont naturellement analogues à celles de la dérivation ordinaire. Notons la relation

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha - \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} = 1,$$

semblable à l'identité en  $x$  et  $\partial / \partial x$ , rappelée plus haut.

Les notions qui précèdent concernent un opérateur isolé. Pour les étendre à un ensemble  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{3n}$  de grandeurs quantiques, ensemble possédant les caractères étudiés au paragraphe précédent, il faut nécessairement prendre le repère défini par les directions principales communes. Vu les caractères en question, il existe une correspondance univoque et réciproque entre les états de l'ensemble (caractérisés par  $3n$  valeurs propres) et les vecteurs du repère. Les coordonnées d'un vecteur quelconque  $X$  sont donc maintenant des fonctions  $X(a_1, a_2 \dots a_{3n})$  de  $3n$  variables. On définit  $\partial X / \partial \alpha_r$  par ses coordonnées  $\partial X(a_1, a_2 \dots) / \partial a_r$ . Le terme d'indétermination conserve la même forme *if*, mais  $f$  est une fonction des  $3n$  variables  $a_r$ . Les matrices représentant  $\alpha_r$  et  $\partial / \partial \alpha_r$  sont toujours formées avec les fonctions symboliques  $\delta$  et  $\delta'$ : la dépendance de ces matrices vis-à-vis des variables  $a_s$  ( $s \neq r$ ) s'exprime par un produit de  $3n - 1$  facteurs  $\delta(a'_s - a''_s)$ . Que l'on parte de la définition première ou des matrices représentatives, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_r} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} - \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \frac{\partial}{\partial \alpha_r} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \alpha_s - \alpha_s \frac{\partial}{\partial \alpha_r} = \delta_{rs}.$$

Venons maintenant au troisième point : l'opportunité géométrique d'envisager l'opérateur  $\pm i \partial / \partial \alpha$ . L'opérateur  $\alpha$  est hermitien : nous allons faire voir que  $\partial / \partial \alpha$  ne l'est pas mais qu'il suffit de le multiplier par  $\pm i$  pour le rendre tel. Le plus simple est de nous reporter à la représentation matricielle relative au repère formé des vecteurs principaux  $A$  de  $\alpha$ . Ici, le caractère hermitien de  $\alpha$  s'exprime par la réalité des éléments  $a' \delta(a' - a'')$  de la matrice, qui est une sorte de matrice diagonale généralisée. Les éléments de la matrice représentant  $\partial / \partial \alpha$  sont réels, eux aussi, mais il ne s'agit plus de la représentation d'un opérateur relative à ses propres axes ; la matrice n'est plus diagonale. La fonction  $\delta(x)$  est supposée symétrique : il convient d'admettre que  $\delta'(x)$  est antisymétrique. Ainsi  $\delta'(a' - a'')$  n'est pas une matrice hermitienne ; mais  $i \delta'(a' - a'')$ ,



qui est purement imaginaire, possède la symétrie hermitienne. Comme cette symétrie est invariante pour les rotations complexes, l'opérateur lui-même,  $i\partial/\partial\alpha$ , est hermitien.

Avec les dérivées ainsi affectées du facteur  $i$ , et que nous appelons dérivées hermitiennes, la relation de commutation devient

$$i \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \right) \alpha_s - \alpha_s \left( i \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \right) = i \hat{O}_{rs},$$

relation à laquelle il faut joindre la permutabilité pure et simple des dérivées. Le caractère hermitien de l'opérateur se révèle ici dans l'imaginaire du second membre. On tire, en effet, de la règle  $\overline{\xi \eta} = \overline{\eta} \overline{\xi}$ , soit, si  $\xi$  et  $\eta$  sont hermitiens, de la règle  $\overline{\xi \eta} = \eta \xi$ , la relation

$$\eta \xi - \xi \eta = \overline{\xi \eta} - \xi \eta,$$

dont le second membre est visiblement de la nature d'une imaginaire pure.

Comparée à la « condition quantique » la relation de commutation des  $i\partial/\partial\alpha_r$  et des  $\alpha_s$  prouve que les grandeurs quantiques  $\beta_r$  canoniquement conjuguées des  $\alpha_r$  ne sont pas autre chose que les dérivées hermitiennes  $i\partial/\partial\alpha_r$  affectées du coefficient réel  $-h/2\pi$ . L'indétermination essentielle de  $i\partial/\partial\alpha_r$ , qui s'exprime par un terme complémentaire réel  $\partial f(a_1, c_2 \dots)/\partial\alpha_r$ , n'intervient pas essentiellement ici, mais uniquement dans le fait que les créateurs de la mécanique quantique et de la mécanique ondulatoire ont levé naturellement l'indétermination des grandeurs conjuguées  $\beta$ , et corrélativement celle des vecteurs principaux communs des  $\alpha$ , à raison même de la voie où ils s'étaient engagés.

Les grandeurs quantiques canoniquement conjuguées jouissent d'une propriété statistique remarquable. En effet, les produits scalaires de deux vecteurs principaux tels que  $A(a'_1, a'_2 \dots)$  et  $B(b'_1, b'_2 \dots)$ , appartenant respectivement aux deux repères communs des ensembles dynamiques canoniquement conjugués  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$  et  $\beta_1, \beta_2 \dots$ , et qui sont du type  $A | \varepsilon B$  ou  $A \varepsilon | B$  sont donnés par l'expression

$$h^{-n/2} e^{\pm 2\pi i (a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + \dots) / h};$$

si l'axe des probabilités est dirigé suivant  $A(a'_1, a'_2 \dots)$ , la probabilité relative d'un état  $b'_1, b'_2 \dots$  de l'ensemble  $\beta_1, \beta_2 \dots$  est donnée

par le carré du module de cette expression, soit par  $\hbar^{-n}$  : elle est donc pareille pour tous les états de l'ensemble des  $\beta$ .

Terminons ces considérations sur la dérivation quantique en signalant la relation

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha) - F(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} = \left( \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha} \right)$$

ou

$$\beta F(\alpha) - F(\alpha) \beta = -i\hbar' \left( \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha} \right),$$

où la parenthèse aux seconds membres indique la simple dérivation analytique de la fonction entière  $F$  de  $\alpha$  (par opposition à la dérivation

$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha)$ , où  $\partial/\partial \alpha$  s'applique à un vecteur  $F(\alpha) X$ ). Pour  $F(\alpha) = \exp. [i c \alpha]$ , elle donne la règle de commutation

$$e^{i c \alpha} \frac{i \partial}{\partial \alpha} = \left( \frac{i \partial}{\partial \alpha} + c \right) e^{i c \alpha}$$

ou

$$e^{i c \alpha} \beta = (\beta - c \hbar') e^{i c \alpha},$$

soit

$$\gamma_c \beta = (\beta - c \hbar') \gamma_c$$

en posant  $\gamma_c = \exp. [i c \alpha]$ . La dernière formule peut remplacer la condition quantique. Elle conserve un sens même lorsque  $\gamma_c$  ne peut plus positivement se mettre sous la forme exponentielle : elle définit alors une *condition quantique généralisée*. Cette circonstance se présente, par exemple, pour un opérateur  $\nu$  dont les valeurs propres  $n$  forment la suite des entiers :  $i \partial/\partial \nu$  n'a évidemment pas de sens puisque la variable  $n$  n'est pas continue ; mais la relation symbolique

$\exp. [i \partial/\partial n] \cdot \varphi(n) = \varphi(n+1)$  tirée du développement  $\sum \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial n^k}$

de l'exponentielle avec substitution des ordres de dérivation aux puissances, donne un sens à  $\exp. [i \partial/\partial n]$ . On utilise notamment des grandeurs conjuguées généralisées telle que  $\gamma_c$  et  $\beta$ , dans la théorie du vibreur harmonique ( $\beta$  est le moment normal  $J$  : l'analogue quantique de la variable angulaire  $\omega$  n'existe pas). On les utilise aussi dans la théorie de la double quantification et dans celle de l'interaction de l'atome et des radiations.

## 6. — LA DÉRIVATION TEMPORANÉE QUANTIQUE.

Nous allons maintenant envisager un caractère supplémentaire des grandeurs quantiques et de l'axe des probabilités : leur dépendance vis-à-vis du temps  $t$ . Pour simplifier sans rien omettre d'essentiel à la question présente, au lieu d'un ensemble dynamique, envisageons seulement une grandeur quantique  $\alpha$ , ses vecteurs principaux  $A$  et ses valeurs propres  $a$ . Nous avons ici des valeurs propres  $a(t)$  et des vecteurs correspondants  $A(t)$ . Ces derniers sont supposés normés ; de plus, le facteur de phase qui les affecte et qui est une fonction de  $a(t)$  est supposé ne pas dépendre autrement de  $t$ . Envisageons alors un vecteur  $X$  et ses coordonnées relatives au repère  $A(t)$ , qui forment une suite continue  $X(a_t)$ . D'une manière générale, ces coordonnées sont définies par une fonction  $f(a_t, t)$  : elles sont une fonction explicite de  $t$ . Nous avons déjà envisagé l'opérateur  $\partial/\partial a_t$  formé à l'aide de  $\partial X/\partial a_t$  ; la présence du paramètre  $t$  ne change rien à cette notion. Examinons parallèlement l'opérateur obtenu de la même manière à partir de  $\partial f(a_t, t)/\partial t$ .

Si, au lieu de  $\alpha(t)$ , nous avons adopté un autre opérateur  $\xi(t)$  où  $t$  a la même valeur et un repère  $\Xi(t)$  défini avec les mêmes réserves touchant la phase, nous aurions obtenu, pour les coordonnées de  $X$ , une autre fonction  $g(x_t, t)$ , mais un opérateur  $D_t^\xi$  rigoureusement identique à  $D_t^\alpha$ . En effet, la rotation hermitienne qui permet de passer d'un repère à l'autre dépend des  $a_t$  et des  $x_t$ , mais non pas explicitement de  $t$ . Cette rotation transforme les coordonnées  $f(a, t)$  du vecteur  $X$  en  $g(x, t)$  : elle transforme de même les coordonnées du vecteur  $D^\alpha X$ , soit  $\partial f/\partial t$  en  $\partial g/\partial t$  qui sont précisément les coordonnées de  $D^\xi X$ . L'objet identique défini par  $D_t^\alpha$  ou par  $D_t^\xi$  peut donc être noté  $D_t$ . Corrélativement, les représentations  $f(a_t, t)$  et  $g(x_t, t)$  de  $X$  indiquent la même dépendance  $X(t)$  de  $X$  vis-à-vis de  $t$ . Nous appellerons  $DX$  la *dérivée temporanée* de  $X$ .

Nous allons maintenant examiner l'opérateur  $D$  sous le rapport de la symétrie et constater que  $iD$  est hermitien et non pas  $D$ . Outre la *dérivation temporanée hermitienne*  $iD$ , nous introduirons alors la *dérivation temporanée quantique* —  $i\hbar' D$ , et nous indiquerons son rôle : la formation de l'équation



$$-i\hbar D\Omega + H(\alpha_1, \alpha_2 \dots; \beta_1, \beta_2 \dots; t)\Omega = 0,$$

qui est l'équation fondamentale de la mécanique quantique, sous la forme d'une relation vectorielle de l'espace infini-dimensionnel hermitien.

Le caractère hermitien de l'opérateur s'exprime par la relation

$$Y \varepsilon | i D X = \overline{X \varepsilon | i D Y},$$

qui découle, allons-nous voir, des propriétés de l'opérateur  $D_\varepsilon$ , corrélatif de  $D$ , pour les vecteurs du type  $\varepsilon X$ . L'opérateur  $D$  peut s'appliquer à un vecteur  $\varepsilon X$  mais il ne donne pas le même résultat que l'opérateur  $D_\varepsilon$  défini à l'aide de  $\varepsilon X$  comme  $D$  à l'aide de  $X$ . Entre  $D$  et  $D_\varepsilon$ , on a d'abord la relation immédiate  $D_\varepsilon \varepsilon X = \varepsilon DX$ . Mais une seconde relation entre  $D$  et  $D_\varepsilon$  peut être tirée de la constance du produit scalaire  $X \varepsilon X$ . On a, par cette voie,

$$D(X \varepsilon X) = D_\varepsilon \varepsilon X | X + X \varepsilon | DX = 0,$$

ou, en vertu de l'égalité

$$X \varepsilon | DX = X | D_\varepsilon X,$$

qui exprime, pour  $D$ , ce que nous avons appelé la *symétrie fondamentale* de tout opérateur linéaire,  $D \varepsilon X = -D_\varepsilon X$ . Des deux relations, on tire  $\varepsilon DX = -D \varepsilon X$ , qui concerne uniquement l'opérateur  $D$ . Ce principe commutatif, joint aux principes commutatifs généraux, donne

$$\begin{aligned} Y \varepsilon | i DX &= X | i D_\varepsilon Y = -X | i \varepsilon DY \\ &= X | \varepsilon i DY = \overline{X \varepsilon | i D Y} : \end{aligned}$$

d'où la condition hermitienne ci-dessus. Observons que la règle de commutation est pareille pour  $\varepsilon \partial / \partial \alpha$ . On peut ici la tirer du caractère hermitien de  $i\partial / \partial \alpha$ , qui se déduit de l'antisymétrie de la matrice originelle,  $\delta'(a' - a'')$ , de l'opérateur  $\partial / \partial \alpha$ .

L'analogie entre  $D$  et  $\partial / \partial \alpha$  s'étend au domaine propre de la mécanique quantique : comme la dérivée hermitienne  $i\partial / \partial \alpha$ , la dérivée temporanée hermitienne  $iD$  est toujours affectée du facteur réel  $-\hbar/2\pi$ . Elle figure ainsi dans l'équation fondamentale de la mécanique quantique  $-i\hbar D + H = 0$ . L'opérateur  $H$  est l'hamiltonien du système physique. Il est une expression formée avec un ensemble dynamique  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$  et aussi, généralement, avec l'en-

semble canoniquement conjugué  $\beta_1, \beta_2, \dots$ . La relation entre les deux ensembles peut répondre exactement à la définition des  $\beta$  par  $-ih'\partial/\partial\alpha$ . Elle peut aussi se présenter sous la forme d'une relation commutative autre que celle qui dérive positivement de cette définition. Nous en avons donné un exemple. Dans tous les cas, la constante  $\hbar$  se présente nécessairement ici comme devant  $iD$ . D'autre part, vu l'équation même,  $H$  doit être hermitien. C'est pourquoi un produit  $\xi\eta$  de deux grandeurs quantiques  $y$  figure toujours accompagné du produit  $\eta\xi$  pris avec le même signe : l'expression  $\xi\eta + \eta\xi$  est essentiellement hermitienne. Maintenant, les opérateurs  $H$  et  $-ih'D$  concernent un vecteur  $X$ , qui est l'inconnue de l'équation fondamentale : ce vecteur est précisément l'axe  $\Omega$ . Ainsi, l'équation fondamentale détermine le mouvement de l'axe des probabilités.

Généralement, l'hamiltonien dépend explicitement de  $t$  : l'absence exceptionnelle de  $t$  donne lieu à des faits remarquables. Les projections  $x(a_1, a_2, \dots; t)$  du vecteur  $X$  sur le repère défini par l'ensemble dynamique  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  prennent la forme  $x(a_1, a_2, \dots) \exp. [-2\pi i Wt/\hbar]$ , où  $W$  est une constante réelle. L'équation fondamentale devient, après substitution,  $HX_0 - WX_0 = 0$ , qui est précisément l'équation des valeurs propres de  $H$ . Ces valeurs propres sont constantes. *On peut convenir, ici, que les vecteurs principaux de l'hamiltonien définissent des directions absolument fixes de l'espace infini-dimensionnel et que le vecteur  $X$ , qui figure généralement l'axe  $\Omega$  des probabilités, est absolument fixe.* Comme il existe un ensemble dynamique  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  de grandeurs quantiques absolument fixes (dont  $H$  est une fonction), nous avons un repère tout désigné pour l'étude de l'équation vectorielle fondamentale de la mécanique quantique. Les coordonnées de  $X$  présentent, ici encore, le facteur exponentiel en  $Wt$  : il convient naturellement d'utiliser le facteur arbitraire de phase (des représentations en général) pour faire disparaître ce facteur exponentiel et obtenir pour  $X$  des coordonnées constantes. Or ce changement en implique un autre, qui concerne la matrice représentative d'un opérateur quelconque. En général, les matrices représentent des opérateurs pris au même instant ; elles ne dépendent pas explicitement de  $t$  : dans le cas présent, les éléments contiennent le facteur hermitien  $\exp. [2\pi i (W_r - W_s) t/\hbar]$ .

Nous retrouvons ainsi les matrices d'HEISENBERG, qui furent la

première représentation matricielle des grandeurs quantiques. Le facteur hermitien répond justement aux fréquences du rayonnement de l'atome. Cette circonstance a joué un rôle important dans la découverte de la mécanique quantique. On a cru, d'abord, que les  $3n$  opérateurs-coordonnées représentaient (au facteur  $e$  près) des moments électriques : la vibration d'électrons de charge  $e$  était, pensait-on, la cause des radiations émises ou absorbées. Les éléments matriciels des coordonnées donnaient assez exactement les intensités en même temps que les fréquences. La mécanique quantique n'admet plus cette conception de l'émission : elle utilise, pour l'émission, l'absorption et la diffusion des radiations lumineuses par l'atome, l'hamiltonien de DIRAC. A côté des  $3n$  opérateurs-coordonnées d'HEISENBERG, DIRAC envisage une suite de  $3m$  opérateurs-moments électriques où  $m$  est infini. L'hamiltonien se décompose en trois termes : le premier terme dépend uniquement de la première suite de grandeurs quantiques ; le second terme est construit avec les opérateurs de la seconde suite ; le troisième terme contient toutes ces grandeurs. La théorie utilise la signification statistique des produits scalaires infinidimensionnels. On trouve ici la justification de la conception originelle d'HEISENBERG, comme première approximation.





## CHAPITRE III

### L'ultraphénomène quantique.

---

#### 7. — L'ULTRAPHÉNOMÈNE TRIDIMENSIONNEL.

Prolonger l'intuition sensible selon les indications fournies par les équations des phénomènes accessibles est une démarche toute semblable à la prévision : elle appartient strictement au domaine scientifique pourvu qu'elle soit d'esprit empiriste. Si l'opération nous fait passer, non, par une sorte de préimagination, à des phénomènes cachés, à des ultraphénomènes, mais par une prétendue intuition intellectuelle, à des entités rationnelles, à des « intelligibles », à des « noumènes », elle relève de la métaphysique ; elle caractérise, à notre sens, une méthode philosophique illusoire. L'univers cartésien des atomes est un monde nouménal ; la structure de l'univers en atomes chimiques est un ultraphénomène.

A l'égard de l'ultraphénomène, les théories quantiques les plus avancées adoptent une attitude très nette. D'une part, elles renoncent presque complètement aux ultraphénomènes tridimensionnels divers, cinétiques et topographiques : elles ne conservent guère que l'atome chimique ponctuel, système de vecteurs tridimensionnels issus d'un point, et les champs de propagation électromagnétiques et brogliens. D'autre part, elles tendent à introduire l'ultraphénomène à une infinité de dimensions, l'atome comme système de vecteurs infinidimensionnels issus d'un point de l'espace infinidimensionnel propre à l'atome. L'examen du premier point nécessite quelques observations préliminaires sur l'idée de mobile et ses généralisations.

Au point de vue cinématique, un mobile ponctuel est simplement une ligne du continu espace-temps. Cette conception ne relève aucunement de la théorie de la relativité : aucune idée de métricité n'y

est attachée ; l'espace et le temps, séparément, sont ici des continus amorphes. Dire que le mobile est permanent, c'est uniquement exprimer la continuité de la ligne espace-temps : tout mobile est donc essentiellement permanent. A un point de vue plus franchement physique, l'idée de mobile comporte en outre essentiellement quelque caractère conservatif : on attache au mobile quelque propriété, quelque constante, comme la masse ou la charge ; la masse d'inertie (le coefficient cinétique), est généralement visée quand on parle d'un mobile réel, d'une particule physique. Or voici le sens où l'on tend à généraliser mais aussi à dégrader l'idée de mobile.

D'abord, on considère qu'une suite interrompue de lignes d'espace-temps peut représenter un mobile unique, identique, pourvu qu'elle ne présente pas deux points simultanés et qu'il y ait quelque relation conservatrice entre les divers fragments de lignes. Bien plus, on maintient encore l'idée de mobile, si la ligne d'univers se réduit à une suite de points, voire à deux points ou même à un seul. Ces généralisations atténuent l'idée de permanence ; elles maintiennent pourtant celle d'identité, du moins abstraitement. Mais si, au lieu d'un mobile généralisé, au lieu d'une suite de points, nous avons une multitude de mobiles semblables, l'idée d'identité disparaît à son tour et ainsi, toute idée de mobile.

Notons que dans ces conditions d'apparitions instantanées, l'idée de vitesse n'a plus de fondement. On utilise bien ici encore le terme d'impulsion : il n'est plus question d'un concept cinématique et dynamique, mais d'un concept énergétique vectoriel. La théorie classique du champ électromagnétique nous a familiarisés déjà avec l'idée d'un vecteur-impulsion défini en fonction des vecteurs électrique et magnétique et non plus, en principe, en fonction de la vitesse d'un mobile ; la dénomination du vecteur comme impulsion est simplement indiquée par une relation où il se compose avec des impulsions mécaniques : l'émission de radiations électromagnétiques produit un recul de la source, qui est un corps ; de même, le corps qui absorbe ou réfléchit recule. Jamais pourtant la théorie classique du champ n'a suggéré que l'impulsion du champ, qui figure dans l'équation de la conservation de l'impulsion totale serait de nature mécanique. Il faudrait remonter aux modèles mécaniques de MAXWELL, beaucoup plus anciens, pour trouver une suggestion de cette espèce. Dès LORENTZ, on n'y songe plus. C'est même plutôt un fondement électromagnétique de l'impulsion du corps lui-même que

l'on envisage : le corps engendre un champ qui, lors du mouvement, reste quasi stationnaire, et l'impulsion propre du champ s'exprime alors, exceptionnellement, en vertu du caractère quasi stationnaire, en fonction de la vitesse même du corps. Ainsi, l'idée d'un vecteur-impulsion purement énergétique, et non cinétique, se présente déjà dans la théorie classique du champ électromagnétique. C'est seulement une impulsion de ce genre qui peut se présenter à un instant donné en un point où il n'y a qu'un mobile dégradé, impulsion énergétique, nous ne disons pas bien entendu électromagnétique.

Ces considérations s'appliquent précisément aux électrons, qu'on les envisage dans l'atome chimique, dans les rayons cathodiques ou dans les corps conducteurs. Elles s'appliquent aussi aux photons. Généralement on est dans le cas d'une multitude de points signalés à tel ou tel moment. Quelquefois on croit suivre une même particule : elle se signale à deux instants presque simultanés (effet Compton particulière) ou en une suite de points définissant une sorte de trajet (lignes de condensation). On peut rigoureusement parler de charges unitaires, de masses unitaires, de quanta d'énergie et même d'impulsion ; peut-on proprement parler de particule chargée, douée d'inertie, possédant telle énergie cinétique et telle impulsion cinétique ?

Notons d'abord que c'est toujours au sein de l'atome du chimiste que les phénomènes en question se présentent. Tel atome perd une charge, tel autre en gagne une égale ; un atome subit une impulsion, un autre en subit une égale et opposée. Il y a des échanges entre les atomes chimiques. On n'observe jamais un phénomène dans l'espace qui s'étend entre les atomes chimiques. Quand nous parlons du choc d'un photon et d'un électron, il s'agit d'un électron de l'atome chimique, donc de cet atome même. S'il est question du choc mutuel des électrons, le phénomène concerne un atome chimique dans son rapport avec un autre atome chimique. Celui-ci a émis un électron, c'est-à-dire qu'il a perdu une charge unitaire, éprouvé un recul et subi une transformation exprimée par le terme d'ionisation. Le premier atome chimique se trouve influencé d'une manière corrélative ; en particulier, il éprouve un recul.

La mécanique quantique fait dépendre de lois statistiques les échanges électroniques et photoniques. Elle envisage séparément, d'une part, l'atome chimique comme centre d'émission, d'absorption et de diffusion, et d'autre part — ceci nous intéresse davantage



en ce moment — les champs électromagnétiques et brogliens qui s'étendent entre les atomes chimiques, entre les corps. Les ondes de ces champs (ondes lumineuses, ondes cathodiques) règlent la statistique des phénomènes élémentaires qui apparaissent dans les différents atomes chimiques qu'elles atteignent. Or, aux interférences des ondes répondent des interférences des probabilités, *en opposition avec la composition classique des probabilités, qu'exigerait la théorie balistique avec permanence et identité des particules.*

Pour les trains d'électrons, il s'agit là d'une application des principes généraux de la mécanique quantique. On prend, en effet, comme équation du train d'électrons sans interactions, l'équation quantique dite de l'électron unique. L'ensemble dynamique des grandeurs quantiques est constitué de trois opérateurs-coordonnées; l'ensemble canoniquement conjugué est représenté par trois opérateurs-impulsions : l'hamiltonien est une fonction quadratique de ces derniers. Dans le cas présent, les valeurs propres d'un opérateur-coordonnée sont des coordonnées de l'espace tridimensionnel. L'équation quantique fondamentale du système physique concerne donc (après séparation des parties réelles et imaginaires) des ondes au sens propre du mot. D'après la théorie générale, ces ondes permettent d'apprécier le poids statistique de l'événement représenté par une détermination des trois coordonnées : cet événement est précisément ici la présence de l'électron au point correspondant. Mieux : le carré du module de l'amplitude en un point mesure la probabilité d'un choc pour un atome chimique qui serait situé en ce point.

De même pour les trains de photons. La théorie des ondes de probabilités, appliquée comme nous venons de voir aux électrons sans interaction, aux ondes cathodiques, apparaît comme une indication sur le rôle statistique des ondes électromagnétiques. L'induction, dans ce parallélisme, est à l'heure présente exactement inverse de ce qu'elle fut à l'origine de la mécanique ondulatoire : elle va des rayons cathodiques à la lumière.

En somme, en réglant par des ondes tridimensionnelles les échanges électroniques et photoniques entre les atomes chimiques et les corps, la mécanique quantique, à raison des interférences possibles, tend à dégrader l'idée de mobile attachée aux électrons et aux photons. Observons maintenant que son intervention en thermodynamique conduit, d'une manière très différente, à la même indica-

tion. Les ondes de probabilité sont ici des ondes fictives de l'espace à  $3n$  dimensions, où  $n$  désigne le nombre de particules. Trois types principaux de statistiques découlent des trois possibilités principales concernant la symétrie des ondes relativement aux  $n$  mobiles. Or ces trois statistiques se trouvent correspondre à trois évaluations du « poids » des complexions. En fait, pour le gaz d'électrons et pour le gaz de photons, deux seulement sont valables : ce sont précisément celles qui, dans le dénombrement des complexions, n'attribuent aucune individualité aux particules. *Cette conclusion est bien conforme à l'idée que la permanence et l'identité, caractères essentiels d'un mobile ordinaire, doivent être écartées pour les électrons et les photons.* Notons que la thermodynamique quantique du gaz d'électrons et du gaz de photons peut être traitée d'une autre manière. Au lieu d'envisager  $n$  mobile de  $3n$  opérateurs-coordonnées, on envisage un seul mobile mais ce que l'on a appelé une double quantification. Les ondes en résonance avec l'enceinte sont considérées comme une première quantification, appelée spatiale : la distribution des particules entre ces ondes est étudiée comme une seconde quantification. On passe ici de l'équation quantique de la particule unique à une équation dont les grandeurs quantiques (ou plutôt leurs valeurs propres) sont les nombres de particules relatives aux différentes ondes. On retrouve de cette manière les mêmes résultats que par la première méthode. Les trois statistiques répondent ici aux alternatives possibles dans le choix des opérateurs canoniquement conjugués.

Concernant la double quantification, nous devons également signaler ce qui suit. Elle paraissait ouvrir la voie vers une conception plus large de la mécanique quantique. Sous sa forme classique, la théorie des quanta est une sorte de transposition quantique de la mécanique des interactions instantanées : la double quantification faisait entrevoir une transposition de l'électrodynamique. Et cela, d'abord, parce qu'elle vise des champs ; ensuite, parce qu'elle concerne précisément, en particulier, les ondes lumineuses donc le champ électromagnétique. La double quantification réussit dans la théorie du gaz d'électrons et du gaz de photons. Elle réussit également dans la mécanique des  $n$  électrons : ici comme pour le gaz d'électrons, elle retrouve par une autre voie des résultats acquis. Mais le passage à l'électrodynamique, aux actions retardées s'est avéré impossible. Pour la question de la réalité des électrons dans l'atome, comme mobiles au sens propre ou au sens général précisé

plus haut, cet échec est très significatif. En effet, la théorie quantique de l'atome chimique est précisément une transposition quantique de la mécanique classique des  $n$  corps, avec attraction instantanée du type newtonnien. Si l'atome était réellement spatial, s'il présentait des électrons occupant, à un instant donné, une position déterminée, il conviendrait de s'attacher plutôt à une transposition quantique de l'électrodynamique. On devrait voir figurer, dans l'équation de l'atome, le potentiel électrodynamique à côté du potentiel électrostatique. *Le fait qu'il est impossible de développer de ce côté la mécanique quantique est un argument sérieux pour la thèse du caractère non cinétique et non topographique de l'atome.*

D'une manière générale, une grandeur quantique est un opérateur linéaire : les valeurs qu'elle peut prendre sont représentées par les valeurs propres de l'opérateur ; elles forment une suite finie, infinie ou continue. Ceci s'applique aux opérateurs-coordonnées figurant dans l'équation de l'atome. Ces grandeurs indiquent-elles la position d'un point ? Sont-elles topographiques ou figurent-elles seulement, trois à trois, des vecteurs physiques sans plus ? Ce qui précède nous invite à choisir la seconde alternative. La non-spatialité de l'atome chimique est encore indiquée par d'autres considérations. Commençons par noter l'analogie formelle entre l'équation quantique de l'atome chimique et l'équation d'un train d'électrons sans influences mutuelles mais soumis à l'action d'un champ électrique. L'analogie va même jusqu'à l'identité s'il s'agit, d'un côté, de l'atome d'hydrogène, et de l'autre, du champ électrique produit par une charge positive. Pour les trains d'électrons, la signification géométrique des opérateurs-coordonnées n'est pas douteuse. Mais, pour l'atome chimique, l'analogie formelle de son équation avec celle du train d'électrons ne doit pas nous empêcher de voir qu'il s'agit d'un objet essentiellement différent. Au lieu d'ondes  $\Psi(x, y, z, t)$  de l'espace tridimensionnel, nous avons des fonctions de  $3n$  coordonnées. Pour des raisons de symétrie, il est généralement possible d'exprimer ces fonctions à l'aide de fonctions  $\Psi^*(x, y, z)$  ; mais l'équation quantique présente alors des complications analytiques sans intérêt physique. *Il est donc peu probable qu'il y ait, dans l'atome, des ondes du type cathodique.* Cette conclusion s'accorde avec la non-spatialité des opérateurs-coordonnées de l'atome, que nous avons déduite de l'inexistence de propagations électromagnétiques internes.

Notons bien qu'il ne s'agit pas ici de savoir si l'image de l'atome



chimique comme noyau positif entouré d'électrons négatifs formant un système de configuration invariable ou une charge densitaire fonction du rayon n'a pas quelque rapport avec la réalité. La chimie utilise avec profit l'idée des configurations électroniques ; elle l'étend à la molécule et aux cristaux, elle l'étendra peut-être aux grosses molécules et plus généralement aux micelles colloïdales. De même, l'idée des densités variant avec la distance au noyau a été utilisée avec succès dans l'étude des spectrogrammes interférentiels donnés par les cristaux. De ces théories, qui sont également non cinétiques, on pourrait dire qu'elles satisfont bien notre besoin d'intuitions spatiales, par des figures sinon par des mouvements. Mais nous ne devons pas les prendre ici en considération parce qu'elles ne sont pas conçues selon les principes de la mécanique quantique proprement dite.

Ainsi, à notre point de vue, les particules ultimes sont les atomes chimiques. La constitution cinétique ou même topographique en électrons est écartée : les  $n$  électrons de l'atome sont seulement des charges unitaires en rapport avec les  $3n$  opérateurs-coordonnées figurant dans son équation quantique. Il convient de considérer l'atome comme ponctuel. Le point est ici entendu, non au sens du continu mathématique, mais au sens physique de non-résolubilité. La désintégration de l'atome, quand elle donne naissance à deux ou plusieurs atomes chimiques, n'est pas une séparation de particules préexistantes : elle est un phénomène essentiellement représenté par la ramification d'une ligne d'espace-temps et non par plusieurs lignes longtemps très rapprochées et qui s'écartent subitement.

Terminons ces considérations sur l'ultraphénomène tridimensionnel en mécanique quantique par quelques observations en rapport avec l'extension du champ d'application de cette science. Notre thèse générale nous invitait à examiner en première ligne la physique des radiations photoniques et électroniques, y compris la thermodynamique du rayonnement et du gaz d'électrons, et en seconde ligne la physique de l'atome. Mais la mécanique quantique trouve encore des applications au delà de ces deux domaines : au delà de l'atome, elle étudie la molécule ; au delà des radiations et des gaz de photons et d'électrons, elle traite des radiations et des gaz d'atomes chimiques et de molécules. N'y a-t-il pas, dans ces deux domaines, des indications concernant l'ultraphénomène tridimensionnel et, si oui, viennent-elles infirmer, confirmer ou étendre nos conclusions ?

Les succès de la mécanique quantique dans la physique de la molécule démontrent que l'objet de cette doctrine n'est pas seulement un système, à notre point de vue, sans étendue, comme l'atome chimique, qu'un ensemble d'atomes ayant une configuration véritable peut être traité de la même manière qu'un atome unique. Ainsi s'introduisent des distances véritables à côté des opérateurs-coordonnées dont les valeurs propres ne sont pas, selon nous, des coordonnées topographiques. La conception de l'atome non spatial ne s'en trouve aucunement infirmée. L'analogie des coordonnées quantiques avec les coordonnées topographiques, du côté de la forme des équations, bien manifestée en d'autres domaines déjà, se trouve simplement ici renforcée. Elle ne nous oblige aucunement de conclure à l'identité de nature.

L'extension de la conception ondulatoire, au delà des radiations et des gaz de photons et d'électrons, aux radiations et aux gaz proprement matériels nous met, au contraire, dans une situation encore mal éclaircie. Allons-nous être, pour l'atome chimique et même pour la molécule, comme nous l'avons été pour l'électron et le photon, obligés d'abandonner cette identité, cette permanence, qui en font des mobiles véritables ? S'il fallait se résoudre à cette démarche, ce ne serait pas sans d'importantes réserves concernant sa portée. Le fait que les particules ici en question présentent des phénomènes d'émission, d'absorption et de diffusion et qu'une vitesse de convection s'y révèle directement par l'effet DÖPPLER-FIZEAU (déplacement ou estompage des raies) demeure une indication très précise. De même, l'évidente structure en atomes, des phases condensées, des cristaux, des colloïdes.

#### 8. — L'ULTRAPHÉNOMÈNE INFINIDIMENSIONNEL.

L'existence d'un ultraphénomène physique, celle des architectures en atomes chimiques sous-jacentes au monde sensible, celle des ondes lumineuses et cathodiques, est indiquée par la légalité même des phénomènes accessibles. Le passage à l'ultraphénomène est, en somme, une opération qui donne un corps à certains schèmes de légalité. Mais il s'en faut de beaucoup que nous procédions à cette démarche pour tous les symboles de la théorie physique. Elle reste toujours exceptionnelle. Projeter dans le monde toutes les grandeurs qui figurent dans les équations, faire correspondre des entités phy-

siques aux pièces diverses des systèmes formels qui servent à décrire les phénomènes, est le signe d'une science physique dépourvue d'esprit critique. Interdire, au contraire, d'une manière absolue, toute démarche de cette sorte est, peut-être, le fait d'une philosophie des sciences, éclairée sur la vraie nature des théories scientifiques, avertie aussi du danger d'en tirer plus qu'une prévision empirique des phénomènes, mais inattentive à cette situation que le monde sensible se donne à la conscience comme quelque chose qui doit être affiné, prolongé, complété. L'attitude convenable et véritablement empiriste consiste donc à reconnaître que l'ultraphénomène existe comme le phénomène au sens étroit et à considérer sa poursuite comme une tâche scientifique, au même titre que la prévision.

Il y a, dans les schèmes de la théorie physique, des symboles qui signifient des objets accessibles — par exemple la longueur d'une barre, — des symboles auxiliaires, et aussi des symboles signifiant des objets inaccessibles. Comment distinguer ces derniers, des symboles auxiliaires ? Aucun critère général ne peut être invoqué dans la discrimination. Ici, comme dans tout ce qui concerne, au delà du formel, le rapport du formel au réel, le dernier mot est à l'expérience. Il ne s'agit plus ici de l'expérience sensible proprement dite : l'ultraphénomène reste essentiellement inaccessible, de même que l'avenir comme tel. Mais une expérience intérieure, synthèse vivante d'expériences sensibles et intellectuelles diverses, nous avertit de l'ultraphénomène aussi bien qu'elle nous fait prévoir un phénomène. Il y a ici des probabilités, avec leurs nuances plutôt que leur mesure : il y a aussi des certitudes. Nous sommes certains de l'existence des atomes chimiques, comme de la configuration vue au microscope.

Cela posé, venons à l'ultraphénomène à un nombre infini de dimensions, à l'espace infinidimensionnel hermitien de l'atome. Ce sont les équations quantiques de l'atome qui le suggèrent. Mais pourquoi donnons-nous suite à cette suggestion ?

Nous répondrons à cette question en examinant les différents points suivants. D'abord, la mathématique pure, dès les principes mêmes du calcul fonctionnel, à propos de la solution des problèmes les plus généraux, se trouve naturellement amenée à introduire l'espace infinidimensionnel. En second lieu, ces théories mathématiques sont depuis longtemps utilisées dans de nombreux domaines de la physique mathématique. Troisième point : on n'a jamais vu, dans



l'espace infinidimensionnel ainsi introduit plus ou moins explicitement dans les théories physiques, l'indice d'une positivité physique corrélative : on considérerait à juste titre les calculs et particulièrement les développements en série comme un aspect purement formel des théories. Quatrième point : on pouvait encore envisager les choses de cette manière en mécanique ondulatoire et en mécanique des matrices, quand on en a fait la découverte. Enfin, cinquième point : la signification statistique de la mécanique quantique appelle des réflexions nouvelles. Les développements en séries de fonctions orthogonales ne peuvent plus être tenus pour de simples instruments de calcul ; chaque terme acquiert une individualité physique et représente un phénomène statistique distinct. L'espace infinidimensionnel cesse d'être un simple schème formel ; il est réel comme l'espace tridimensionnel.

Il y a juste un siècle, dans un travail célèbre publié en 1836 et 1837, LIOUVILLE et STURM ont mis en évidence le rôle des *fonctions orthogonales* dans la théorie des équations intégrales linéaires : ils découvraient ainsi, entre un problème fondamental de calcul fonctionnel et l'idée d'espace infinidimensionnel, une connexion essentielle. Soient deux trièdres trirectangles de l'espace tridimensionnel. Considérons-les comme deux repères. La transformation linéaire qui permet de passer d'un repère à l'autre est dite orthogonale : ses coefficients  $c$  satisfont à la relation

$$\sum_k c_{km} c_{kn} = \delta_{mn},$$

où l'indice  $k$  prend, dans la sommation, les valeurs 1, 2, 3 ; le symbole  $\delta$  signifie 1 ou 0 selon que  $m$  et  $n$  sont égaux ou non. C'est la *relation d'orthogonalité*. Pour un espace à  $N$  dimensions,  $k$  varie de 1 à  $N$  ; de même  $m$  et  $n$ . Lorsque  $N$  est infini, la relation d'orthogonalité devient

$$\int f_m(x) f_n(x) dx = \delta_{mn}$$

si l'indice  $k$  fait place à une variable continue  $x$ . Des fonctions  $f_i(x)$  satisfaisant à cette relation sont dites *orthogonales*.

Le lien entre les fonctions orthogonales et les équations intégrales est manifeste. Une équation intégrale linéaire homogène de seconde espèce avec noyau symétrique est, au fond, la généralisation, en géométrie cartésienne infinidimensionnelle, du système d'équations linéaires en termes finis qui donne les axes d'une quadrique. Les

solutions forment un système de fonctions orthogonales : l'orthogonalité des fonctions exprime simplement l'orthogonalité des axes d'une surface du second degré. On se trouve ici à la source même de tous les systèmes de fonctions orthogonales. D'autre part, l'importance du développement d'une fonction quelconque en série de fonctions orthogonales est déjà indiquée par cette simple observation que les séries de FOURIER sont des développements de cette sorte et qu'elles doivent précisément à leur orthogonalité leurs principales propriétés. Dans l'espace infinidimensionnel, le développement orthogonal d'une fonction quelconque s'interprète comme la décomposition d'un vecteur suivant les axes en nombre infini d'un système rectangulaire complet. L'indice des fonctions orthogonales correspond à un axe du système ; la variable, comme indice continu, répond à la suite des axes d'un repère primitif. La fonction développée représente, pour chaque valeur de la variable, la projection du vecteur sur un axe du repère, exprimée à l'aide de ses projections sur le système rectangulaire.

Passons maintenant de l'Analyse à la Physique mathématique. Les phénomènes qui relèvent d'équations linéaires sont nombreux : le fait qu'il s'agit d'équations en termes finis, d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles ou d'équations intégrales passe ici au second plan. Ils donnent tous lieu à des problèmes analogues en rapport avec la linéarité. Citons la décomposition de la lumière, les harmoniques acoustiques, les harmoniques du courant électrique alternatif, la trépidation des machines, etc. La solution met en œuvre les développements trigonométriques, les fonctions orthogonales, les développements en séries de fonctions orthogonales. Dans toutes ces théories donc, le concept d'espace infinidimensionnel euclidien est, en un sens, implicitement présent.

Ainsi, la physique mathématique utilise depuis longtemps et dans de nombreuses questions le schème d'espace infinidimensionnel métrique. Pourquoi n'a-t-on jamais envisagé, à propos de toutes ces questions apparues avant la mécanique quantique, l'idée d'un ultra-phénomène correspondant ? C'est parce que la physique mathématique ne présentait ici, de toute évidence, que des calculs. Les décompositions étaient seulement utiles et indiquées par la linéarité des lois physiques étudiées. On décomposait une fonction perturbatrice périodique en série de FOURIER pour obtenir une forme pratique de l'intégrale exprimant le phénomène perturbé. Les harmoniques

n'étaient une réalité qu'après avoir été isolés et n'existaient même jamais à l'état pur. Comment alors aurait-on songé à donner quelque réalité à l'espace infinidimensionnel qui soustendait les théories ?

La physique des quanta devait changer cette situation. Notons d'abord que les théories quantiques non statistiques attirent déjà très vivement l'attention sur l'appareil infinidimensionnel. La mécanique d'HEISENBERG, dès ses débuts, ramène le principe de correspondance à une analogie entre le calcul nouveau et le calcul des séries trigonométriques. Le calcul introduit se trouve être celui des matrices infinies. L'équation de l'énergie exprime qu'une matrice doit être rendue diagonale par une rotation de l'espace infinidimensionnel. La concordance de la mécanique des matrices et de la mécanique ondulatoire stimule dans le même sens les investigations. Mais on peut toujours penser, à s'en tenir là, qu'il s'agit, en mécanique quantique comme dans les différents domaines où règnent les équations linéaires, de simples décompositions utiles des fonctions en séries de fonctions propres.

La conception statistique surajoutée aux théories quantiques récentes — mécanique ondulatoire et mécanique des matrices — donne un sens nouveau à tout leur appareil mathématique. Les ondes — fonctions propres, fonctions de transformation, rotation de l'espace fonctionnel — deviennent des indices de probabilité. La décomposition des fonctions en séries de fonctions propres cesse d'être artificielle : les termes pris séparément ont une signification physique ; ils règlent la statistique d'un événement déterminé.

Fait remarquable, une conception de cette sorte est apparue en thermodynamique avant la naissance de la physique quantique. Elle est, au fond, présente dans la théorie préquantique du rayonnement noir. On décomposait le champ électromagnétique en ondes en résonance avec l'enceinte *et l'on considérait chaque onde composante comme un phénomène physique*. L'énumération des ondes était en effet assimilée à celle des degrés de liberté d'un mécanisme. La théorie classique de l'équipartition de l'énergie conduisait alors à la formule du rayonnement noir : une formule inexacte, celle de Lord RAYLEIGH. On sait maintenant que l'erreur ne tenait pas dans l'assimilation des ondes composantes à des phénomènes distincts mais au calcul statistique, qui devait tenir compte de la variation discontinue des amplitudes.

En mécanique quantique, dans la question de l'espace infinidi-



mensionnel comme dans celle de l'ultraphénomène tridimensionnel, il faut bien distinguer deux ordres de faits : d'une part, les radiations lumineuses et cathodiques ; d'autre part, les phénomènes d'émission, d'absorption et de diffusion, qui ont pour siège l'atome chimique. A parler strictement, la mécanique quantique vise le second ordre de faits : la théorie des radiations cathodiques est une généralisation immédiate ; celle des radiations lumineuses est indépendante et simplement analogue à la précédente. Ajoutons que la thermodynamique du rayonnement électromagnétique et du gaz d'électrons (conduction métallique) se rattache au premier ordre de faits : les ondes de transfert deviennent des ondes stationnaires, équivalent spatial des fonctions propres de la théorie de l'atome. Or, si l'on excepte l'idée toute première d'EINSTEIN sur la dualité ondes-particules dans les radiations lumineuses, c'est proprement dans le domaine de la thermodynamique, science dont l'ultraphénomène relève essentiellement du calcul des probabilités, que la signification statistique des ondes s'est révélée. A cet égard, la théorie du rayonnement thermique de BOSE et EINSTEIN, et la théorie toute semblable des gaz matériels ou électroniques, de DE BROGLIE et EINSTEIN représentent l'introduction, dans la science, d'une idée d'importance exceptionnelle : les ondes composantes des théories quantiques ont une signification statistique. Ajoutons : *elles ne sont pas de simples produits de l'analyse mathématique : elles ont une existence physique distincte.*

Conçue dans deux domaines qui sont comme des annexes de la science de l'atome chimique, cette idée devait gagner le corps même de la mécanique quantique. Historiquement, le point d'attaque est représenté par la théorie du choc, de BORN. L'onde  $\Psi$  du système perturbé est développée suivant les ondes propres du système, abstraction faite de l'interaction. Ces ondes s'expriment par des fonctions orthogonales : nous nous trouvons donc en présence d'une décomposition dont nous avons examiné plus haut le type et l'interprétation infinidimensionnelle. D'après BORN, fonctions orthogonales et coefficients du développement sont des indices de probabilités.

La conception de BORN fut bientôt généralisée, grâce surtout aux travaux de DIRAC et de JORDAN. On savait que les grandeurs quantiques sont des tenseurs de l'espace infinidimensionnel hermitien, que les directions principales d'un quelconque de ces tenseurs forment un système rectangulaire, que les valeurs propres correspon-

dantes sont celles que prend la grandeur. L'idée de BORN prit alors sa forme générale : le produit scalaire de deux vecteurs principaux normés quelconques relatifs à deux grandeurs quantiques est un indice de probabilité. Ainsi, dans le domaine de la mécanique quantique générale, où le rôle de l'espace infinidimensionnel s'accuse mieux à raison des différents systèmes d'axes envisagés et du caractère invariantif des combinaisons retenues, *la réalité paraît articulée comme le calcul fonctionnel lui-même : l'espace fonctionnel indique un ultraphénomène infinidimensionnel.*

Il convient de donner à la physique mathématique de cet objet nouveau la forme la plus propre à manifester clairement, en toute question, qu'il s'agit d'un espace affine à un nombre infini de dimensions, que cet espace affine est complexe, qu'il possède une métricité hermitienne. L'exposé de la mécanique quantique, du point de vue des ondes ou du point de vue des matrices, ne répond pas à cette exigence. Il est, vis-à-vis de l'espace infinidimensionnel, ce que serait, vis-à-vis de l'espace ordinaire, l'étude de quelques formules de géométrie analytique, étude indifférente au caractère géométrique de ces formules : il ignore l'objet véritablement en question. La géométrie analytique ne manifeste son objet propre qu'en s'attachant au groupe des transformations exprimant l'égalité spatiale : elle étudie les invariants de ce groupe. Dans le même sens, la mécanique quantique doit être présentée sur la base du système des invariants du groupe des rotations hermitiennes : telle est précisément l'idée directrice de l'œuvre de WEYL en physique quantique. Mais nous n'atteignons pas encore ainsi le fond des choses. Nous prenons pour modèle la géométrie analytique : il faudrait s'inspirer de la géométrie pure. En d'autres termes, il faut passer des schèmes arithmétiques, analytiques, constructifs, aux schèmes abstraits, à l'algèbre symbolique. *La base mathématique véritable de la mécanique quantique est une algèbre symbolique exprimant les faits de l'espace infinidimensionnel hermitien comme l'algèbre symbolique de la géométrie pure, non analytique, exprime les faits de l'espace ordinaire.*







## TABLE DES MATIÈRES

---

	Pages
INTRODUCTION .....	3
CHAPITRE PREMIER. — <i>L'espace infinidimensionnel hermitien :</i>	
1. — L'espace infinidimensionnel abstrait non complexe.....	5
2. — Le passage à l'espace complexe.....	14
3. — La réduction à l'ordre scalaire complexe.....	23
CHAPITRE II. — <i>L'utilisation quantique de l'espace hermitien :</i>	
4. — Ensemble dynamique et axe des probabilités.....	29
5. — La dérivation quantique.....	33
6. — La dérivation temporanée quantique.....	40
CHAPITRE III. — <i>L'ultraphénomène quantique :</i>	
7. — L'ultraphénomène tridimensionnel.....	44
8. — L'ultraphénomène infinidimensionnel.....	51











# ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

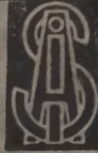
Séries publiées sous la direction de MM.

- GIBRAT (Robert), Paris. — Impasses économiques.
- GIBSON (C. S.), London.
- GOMEZ (Domingo M.), Paris. — Recherches d'Hémodynamique et Cardiologie.
- GOURSAT (E.), Paris. — Leçons sur les Hypergéométriques (et sur quelques fonctions qui s'y rattachent).
- GREENWOOD (Thomas), London. — Logique et méthodologie.
- GUICHARD (Marcel), Paris. — Philosophie et histoire des mesures.
- GUILLAUME (G. et Ed.), Paris. — Economique Rationnelle.
- HADAMARD (J.), Paris. — Analyse mathématique et ses applications.
- HENRI (Victor), Liège. — Physique moléculaire.
- HERBRAND (Jacques), Paris. — Exposés mathématiques publiés à sa mémoire.
- HUBER (M.), Paris. — Statistique et Applications.
- JARRY-GUÉROULT (Robert), Paris. — Dynamique Sociale.
- JAVILLIER (Maurice), Paris. — Chimie agricole.
- JOFFÉ (A. F.), Léninegrad. — Physique des corps solides.
- JOLEAUD (L.), Paris. — Biogéographie.
- JOLIOT (F.), Paris. — Physique et chimie nucléaire.
- JOUNIAUX (A.), Lille. — Chimie analytique (Chimie physique, minérale et industrielle).
- Leçons de Chimie analytique.
- KOLTZOFF (N.-K.), Moscou. — La génétique et les problèmes de l'évolution.
- KRYLOFF (N.), U. R. S. S. — Mécanique non linéaire (Étude des oscillations non linéaires et des systèmes dynamiques y intervenant).
- LAHY (J. M.), Paris. — Psychologie appliquée.
- LANDEVIN (P.), Paris. — I. Relativité ; II. Physique générale.
- LAPIQUE (Louis), Paris. — Physiologie générale du système nerveux.
- LAUGIER (H.), Paris. — Biologie du travail et Biotypologie.
- LECOMTE DU NOUY (P.), Paris. — Biophysique moléculaire.
- LEVI (Giuseppe), Turin. — L'accroissement des organismes.
- LUTFALLA (Georges), Paris. — Economie théorique et Statistique économique.
- MAGNAN (A.), Paris. — Morphologie dynamique et mécanique du mouvement.
- MARGARIA (Rodolfo), Parme. — Physiologie du travail musculaire.
- MARIE (Ch.), Paris. — Electrochimie appliquée.
- MAURAIN (Ch.), Paris. — Physique du globe.
- MAYER (André), Paris. — Physiologie.
- MILLOT (J.), Paris. — Anthropologie physiologique et pathologique.
- MINEUR (Henri), Paris. — Astronomie stellaire.
- MISES (Richard de), Istanbul. — Théorie moderne des probabilités.
- MONTEL (P.), Paris. — Théorie des Fonctions.
- MORRIS (Charles W.), Chicago. — Philosophie scientifique.
- MUSCELEANU (Chr.), Bucarest. — Physique générale et Quanta.
- NADSON (G. A.), U. R. S. S. — Biologie (Rayonnements, Facteurs chimiques et physiques).
- NEEDHAM (J.), Cambridge. — Chemical Embryology (Embryologie chimique).
- NICLOUX (M.), Strasbourg. — Chimie analytique (Chimie organique et biologique).
- NOYES (Albert W. jr.), Providence R. I. (U. S. A.). — Photochimie.
- OCAGNE (Maurice d'), Paris. — Procédés généraux de calcul (Calcul numérique. — Calcul graphique. — Calcul nomographique. — Calcul mécanique).
- OEHMISCHEN (E.), Paris. — Mécanismes naturels et technique humaine.
- OMBREDANE (A.), Paris. — Psycho-physiologie du langage.
- ORCEL (J.), Paris. — Minéralogie.
- PASCAL (P.), Paris. — Chimie générale et minérale.
- PÉREZ (Ch.), Paris. — Biologie zoologique.
- PERRIN (J.), Paris. — Atomistique.
- PIÉRON (Henri), Paris. — Physiologie des Sensations.
- PLATRIER (Ch.), Paris. — Géométrie cinématique ; Mécanique Newtonienne (Cours de l'Ecole Polytechnique).
- POLICARD (A.), Lyon. — Histophysiologie.
- PORTEVIN (A.), Paris. — Métallurgie et Métallographie.
- PUBLICATIONS DU LABORATOIRE D'ESSAIS (Conservatoire national des Arts et Métiers. Paris).
- PRENANT (Marcel), Paris. — I. Biologie écologique ; Leçons de Zoologie ; Publications de l'Institut mathématique de l'Université de Strasbourg.
- RANDOIN (L.). — Equilibre d'alimentation et de nutrition.





# ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES



Séries publiées sous la direction de MM.

- REICHENBACH (Hans), Istanbul. — Logique et théorie de la Science.
- RÉUNION INTERNATIONALE DE CHIMIE PHYSIQUE 1933. — Paris.
- REY (A.), Paris. — Histoire des Sciences.
- RIBAUD (G.), Paris. — Hautes températures.
- RIVERS (Thomas M.), New-York. — Filterable Viruses.
- ROCARD (Y.), Paris. — Théories mécaniques (Hydrodynamique-acoustique).
- SAND (René), Bruxelles. — Médecine sociale et service social.
- SANNIÉ (Dr Charles), Paris. — Criminologie. — Identification et Police scientifique.
- SANTILLANA (G. de) New-York. — L'Homme et l'outil (Man and Gadget).
- SARTIAUX (M. F.), Paris. — Histoire des Techniques.
- SERVIEN (Pins), Bucarest. — Esthétique.
- SESMAT (Augustin), Paris. — Systèmes de Référence et Mouvements (Physique classique).
- Systèmes de Référence et Mouvements (Physique relativiste).
- SIMON (Franz), Oxford. — Physique des basses températures.
- SOUÈGES (R.), Paris. — Embryologie et morphologie végétales.
- SPEARMAN (C.), Londres — Analyse factorielle en psychologie.
- TAKAGI, Tokyo. — Mathématiques générales.
- TAMIYA-(HIROSHI), Tokyo. — Biologie (Physiologie cellulaire).
- TARSKI (Alfred), Varsovie. — Métalogique et mathématique.
- TAYLOR (Hugh S.), Princeton. — Heterogeneous catalysis.
- TCHAKHOTINE (S.), Paris. — L'Organisation dans la Science.
- TCHITCHIBABINE (A.), U. R. S. S. — Chimie organique (Série hétérocyclique).
- TEISSIER (Georges), Paris. — Biométrie et statistique biologique.
- TERROINE (E.-F.), Strasbourg. — Nutrition.
- TOUSSAINT (M. A.), Paris. — Leçons d'aérodynamique appliquée.
- URBAIN (G.), Paris. — Théories chimiques.
- URBAIN (Pierre), Paris. — Géochimie.
- VALÉRY (Paul), Paris. — Conférences du Centre Universitaire Méditerranéen de Nice.
- VERLAINE (Y.), Liège. — Psychologie animale.
- VERNADSKY (W. J.), U. R. S. S. — Problèmes biogéochimiques.
- WALLON (Dr Henri), Paris. — Psycho-biologie de l'enfant.
- WAVRE (R.), Genève. — Conférences Internationales des Sciences mathématiques de l'Université de Genève.
- WEISS (P.), Strasbourg. — Magnétisme.
- WURMSER (R.), Paris. — Biophysique.

## Actualités Scientifiques et Industrielles

### Série 1937 (Suite).

549. LÉON BRILLOUIN. La structure des corps solides dans la physique moderne. 18 fr.
550. LOUIS CARTAN. Spectrographie de masse. Les isotopes et leurs masses..... 20 fr.
551. THOMAS GREENWOOD. Les fondements de la logique symbolique..... 20 fr.
552. GEORGES HOSTELET. Les fondements expérimentaux de l'analyse mathématique des faits statistiques..... 15 fr.
553. L. LISON. Les méthodes de reconstruction graphique en technique microscopique..... 15 fr.
554. R.-J. GAUTHERET. La culture des tissus végétaux : Son état actuel, comparaison avec la culture des tissus animaux..... 20 fr.
555. RAOUL HUSSON. Principes de métrologie psychologique..... 20 fr.
556. M. J.-A. GAUTIER. Recherches dans la série de la pyridine. Etude de quelques  $\alpha$ -pyridones..... 18 fr.
557. JEAN BORDAS. Le soja et son rôle alimentaire..... 8 fr.
558. M. MANGOLD. L'utilisation alimentaire de la cellulose..... 8 fr.
559. RAYMOND GUILLEMET. Le problème du pain : Les méthodes d'appréciation de la valeur boulangère des farines et des blés..... 12 fr.
560. RAYMOND GUILLEMET. Le problème du pain. La fermentation panaire..... 20 fr.
561. RAOUL GOVIN. La considération du poids vif dans les études d'alimentation. 7 fr.
562. B. CABRERA. Dia- et paramagnétisme et structure de la matière..... 20 fr.
563. JEAN LA BARRE. Les régulations hormonales du métabolisme glucidique..... 20 fr.